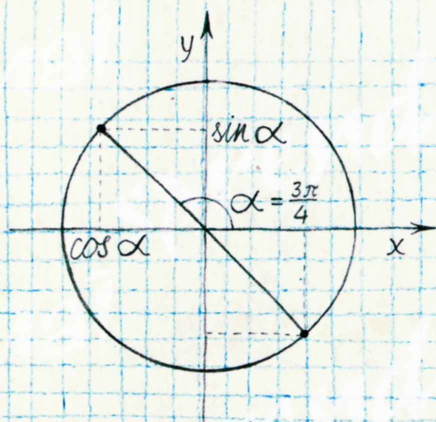
Eglė Danielienė, Aldona Janulevičienė, Daiva Noreikienė

Matematikos kontroliniai darbai su sprendimais

12 KLASĖ

2 dalis

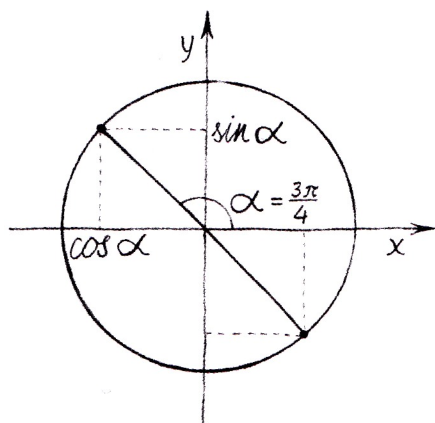


Lygtis $\sin x = -\cos x$ intervale $[0; 2\pi]$ turi 2 sprendinius $\left(\frac{3\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right)$, o intervale $[-2\pi; 2\pi]$ — 4 sprendinius $\left(-\frac{5\pi}{4}; -\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right)$.

Atsakymas. 4 sprendiniai.

Eglė Danielienė, Aldona Janulevičienė, Daiva Noreikienė

Matematikos kontroliniai darbai su sprendimais



12 KLASĖ

2 dalis

TEV
VILNIUS 2007

UDK 51(076)
Da238

Darbo vadovas *Valdas Vanagas*

Redaktoriai: *Juozas Mačys*, *Žydrūnė Stundžienė*

Programinė įranga: *Rolandas Jakštys*

Kompiuterinė grafika: *Edita Tatarinavičiūtė*

Tekstą kompiuteriu rinko ir maketavo *Nijolė Drazdauskienė*

Konsultantas *Elmundas Žalys*

Recenzavo Matematikos ir informatikos institutas

Leidyklos TEV interneto svetainė www.tev.lt

ISBN 978-9955-680-56-7

PRATARMĖ

Ši knygelė skirta XII klasių mokytojams ir mokiniams, pasirinkusiems išplėstinį matematikos kursą bei norintiems geriau pasiruošti brandos egzaminui.

Pirmieji penki knygelės kontroliniai darbai (K11–K15) atitinka paskutinius vadovėlio „Matematika 12. II dalis" (p. 8–100) skyrius. Šių kontrolinių darbų struktūra tokia pati, kaip ir ankstesnėse knygelėse.

Kiti penki kontroliniai darbai (K16–K20) atitinka vadovėlio kartojimo medžiagą (p. 104–177). Jie nuo iki tol buvusių kontrolinių darbų skiriasi tuo, kad yra labiau panašūs į egzamino struktūrą: pirmosios užduotys yra pasirenkamojo atsakymo. Tikimės, kad šie kontroliniai darbai padės visapusiškai pakartoti mokyklinį matematikos kursą, prisiminti matematines sąvokas, formules.

Kaip įprasta, kontrolinių darbų (K11–K20) yra po du variantus. Pirmasis variantas pateikiamas su sprendimais, formulėmis bei paaiškinimais. Analogiškas antrasis variantas skirtas mokiniams pasitikrinti, kaip jie suprato pirmojo varianto užduotis. Knygelės gale pateikiami abiejų variantų atsakymai, todėl mokinys gali ir neskaityti pirmojo varianto sprendimų, o tik pasitikrinti uždavinio atsakymo teisingumą.

Valstybiniam egzaminui padės pasirengti knygelės pabaigoje pateikiamos 4 užduotys. Čia nurodyti ir jų atsakymai.

Manome, kad ši knygelė — tai geras pagalbininkas ne tik mokantis spręsti uždavinius, bet ir rengiantis kontroliniams darbams bei baigiamiesiems egzaminams.

Visi knygelėje pateikiami uždaviniai atitinka standartų ir programų reikalavimus.

Uždavinių sąlygas, sprendimus bei atsakymus patikrino leidyklos TEV specialistai.

Linkime sėkmės!

Autorės

TURINYS

Statistikos elementai

K11 (14.1–14.5)

1. Matuojant šešiolikmečių jaunuolių ūgį, gauti tokie rezultatai (cm):
162, 165, 160, 162, 164, 165, 167, 168, 170, 168,
175, 170, 170, 172, 160, 162, 164, 168, 175, 170.
a) Sutvarkykite imtį (ūgius) didėjimo tvarka.
b) Sudarykite imties dažnių bei santykinių dažnių lentelę.
c) Nubraižykite imties stulpelinę ir skritulinę dažnių diagramas.
d) Padalykite imties duomenų intervalą [160; 175] į 5 lygias dalis. Sudarykite sugrupuotos imties dažnių bei santykinių dažnių lentelę.
e) Nubraižykite sugrupuotos imties histogramą.

2. a) Apskaičiuokite imties 5, 6, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 8, 9, 9, 9, 10, 10, 10, 10 medianą, kvartilius ir modą.
b) Surašyti dviejų klasių mokinių anglų kalbos kontrolinio darbo pažymiai:
11A: 10, 8, 7, 6, 7, 9, 8, 7, 7, 7, 6, 5, 4, 7, 7;
11B: 2, 4, 5, 6, 6, 9, 6, 4, 5, 7, 10, 5, 6, 6.
Raskite kiekvienos imties modą, medianą ir kvartilius.
c) Raskite atsitiktinio dydžio modą, medianą ir kvartilius, kai atsitiktinio dydžio skirstinys yra:

$x_i =$	-3	2	4	6	7	9	10
$p_i =$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{4}{16}$

3. Miesto matematikos olimpiadoje dalyvavo trys vienos mokyklos mokiniai. Reikėjo išspręsti 10 uždavinių, kurių kiekvienas buvo vertinamas nuo 0 iki 10 balų. Mokinių rezultatai pateikti lentelėje.

Uždavinio Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Andrius	7	6	3	9	4	6	9	5	9	9
Bronius	4	5	8	2	7	5	2	5	8	8
Raminta	6	4	3	9	9	8	7	6	4	7

Apskaičiuokite kiekvieno mokinio surinktų balų vidurkį ir dispersiją.

4. Duotos funkcijos $f(x) = \ln x + 2$ ir $g(x) = 2x - 3$.
1) Raskite kiekvienos funkcijos apibrėžimo sritį.
2) Raskite $f'(x)$ ir $g'(x)$.
3) Išspręskite lygtį $f'(x) = g'(x)$.

5. Atstumas tarp miestų A ir B lygus 100 km. Iš miesto A į miestą B tuo pačiu metu išvyksta du automobiliai. Pirmojo automobilio greitis yra 10 km/h didesnis negu antrojo. Žinoma, kad pirmasis automobilis 50 minučių buvo sustojęs. Raskite visas pirmojo automobilio greičio reikšmes, su kuriomis jis atvyksta į miestą B ne vėliau negu antrasis automobilis.

1. Matuojant jaunų medelių aukštį, gauti tokie rezultatai (cm):
50, 70, 90, 100, 70, 60, 50, 50, 80, 50,
70, 80, 90, 50, 50, 100, 90, 80, 60, 50.
a) Sutvarkykite imtį (aukščius) didėjimo tvarka.
b) Sudarykite imties dažnių bei santykinių dažnių lentelę.
c) Nubraižykite imties stulpelinę ir skritulinę dažnių diagramas.
d) Padalykite imties duomenų intervalą [50; 100] į 5 lygias dalis. Sudarykite sugrupuotos imties dažnių bei santykinių dažnių lentelę.
e) Nubraižykite sugrupuotos imties histogramą.

2. a) Apskaičiuokite imties 10, 11, 11, 11, 12, 12, 12, 12, 13, 14, 14, 14, 15, 15, 15, 15 medianą, kvartilius ir modą.
b) Surašyti dviejų klasių mokinių vokiečių kalbos kontrolinio darbo pažymiai:
11A: 5, 6, 8, 8, 8, 9, 8, 8, 10, 9, 8, 7, 8, 7, 8;
11B: 4, 5, 7, 10, 7, 7, 7, 10, 9, 8, 7, 7, 5, 6, 7, 10.
Raskite kiekvienos imties modą, medianą ir kvartilius.
c) Raskite atsitiktinio dydžio modą, medianą ir kvartilius, kai atsitiktinio dydžio skirstinys yra:

$x_i =$	-1	2	4	5	7	9
$p_i =$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{12}$

3. Miesto matematikos olimpiadoje dalyvavo trys vienos mokyklos mokiniai. Reikėjo išspręsti 10 uždavinių, kurių kiekvienas buvo vertinamas nuo 0 iki 10 balų. Mokinių rezultatai pateikti lentelėje.

Uždavinio Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Daiva	2	6	4	3	9	7	6	8	7	5
Aira	4	3	8	7	5	6	8	9	9	8
Mantas	9	5	7	8	2	6	7	8	6	6

Apskaičiuokite kiekvieno mokinio surinktų balų vidurkį ir dispersiją.

4. Duotos funkcijos $f(x) = 3\ln(x-2) - 1$ ir $g(x) = 3x + 2$.
1) Raskite kiekvienos funkcijos apibrėžimo sritį.
2) Raskite $f'(x)$ ir $g'(x)$.
3) Išspręskite lygtį $f'(x) = g'(x)$.

5. Miestai A ir B išsidėstę ant upės kranto. 9 valandą ryto iš miesto A į miestą B išplaukia plaustas ir tuo pačiu metu iš miesto B į miestą A išplaukia valtis, kuri sutinka plaustą po 5 valandų. Priplaukusi miestą A, valtis apsisuka atgal ir pasiekia miestą B tuo pačiu metu, kaip ir plaustas. Ar suspės valtis ir plaustas atplaukti į miestą B iki tos pačios dienos 21 valandos?

Statistikos elementai

K11 (14.1–14.5)

1. Matuojant šešiolikmečių jaunuolių ūgį, gauti tokie rezultatai (cm):
162, 165, 160, 162, 164, 165, 167, 168, 170, 168,
175, 170, 170, 172, 160, 162, 164, 168, 175, 170.

a) Sutvarkykite imtį (ūgius) didėjimo tvarka.
b) Sudarykite imties dažnių bei santykinių dažnių lentelę.
c) Nubraižykite imties stulpelinę ir skritulinę dažnių diagramas.
d) Padalykite imties duomenų intervalą [160; 175] į 5 lygias dalis. Sudarykite sugrupuotos imties dažnių bei santykinių dažnių lentelę.
e) Nubraižykite sugrupuotos imties histogramą.

1a.

Surinkti duomenys vadinami imtimi. Duomenis dažnai patogu būna susirašyti nemažėjančia tvarka, t. y. variacine eilute.

160, 160, 162, 162, 162, 164, 164, 165, 165, 167,
168, 168, 168, 170, 170, 170, 170, 172, 175, 175.

1b.

Duomenys dažnai surašomi dažnių arba santykinių dažnių lentelėmis. Dažnių arba santykinių dažnių lentelės pirmoje eilutėje surašomi visi skirtingi duomenys, o kitoje eilutėje parašomi skaičiai, atitinkantys kiekvieno duomens pasikartojimų skaičių (dažnį) — tokia lentelė vadinama *dažnių* lentele.
Duomenų kartojimosi dažnius padaliję iš imties duomenų skaičiaus, gauname duomenų santykinius dažnius. Lentelėje greta duomenų surašę juos atitinkančius santykinius dažnius, gauname *santykinių dažnių* lentelę.
Dažnius ir santykinius dažnius galima surašyti ir vienoje lentelėje.
Imtis: $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$.

Duomuo, $x_i =$	x_1	...	x_n
Dažnis, $f_i =$	a	...	b
Santykinis dažnis, $\frac{f_i}{n} =$	$\frac{a}{n}$	...	$\frac{b}{n}$

Lentelės pirmoje eilutėje surašome visus skirtingus duomenis (žinoma, duomenis rašome didėjančia tvarka):

$x_i =$	160	162	164	165	167	168	170	172	175

Dažnių lentelėje antroje eilutėje rašomi skaičiai, parodantys, kiek kartų duomuo x_i pasikartojo imtyje.

$x_i =$	160	162	164	165	167	168	170	172	175
$f_i =$	2	3	2	2	1	3	4	1	2

Surašius duomenų pasikartojimų skaičius (dažnius), pravartu tuos skaičius sudėti ir pasitikrinti, ar gauta suma lygi imties duomenų skaičiui.
Pasitikriname: $2 + 3 + 2 + 2 + 1 + 3 + 4 + 1 + 2 = 20$.

Santykinių dažnių lentelėje nurodomi ne duomenų dažniai, o jų santykiniai dažniai, t. y. skaičiai, gauti dažnius dalijant iš duomenų skaičiaus.

$x_i =$	160	162	164	165	167	168	170	172	175
$\frac{f_i}{n} =$	$\frac{2}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{4}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{2}{20}$

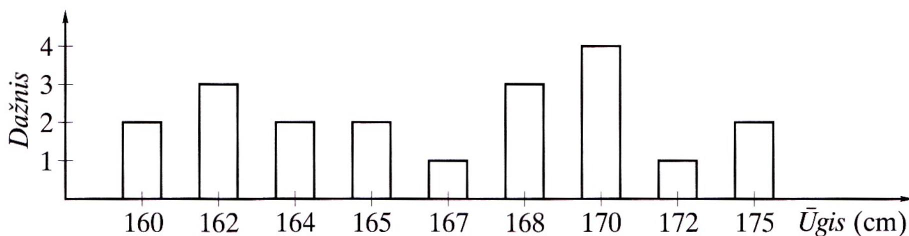
Kai kurias gautąsias trupmenas galima būtų suprastinti, pvz., $\frac{2}{20} = \frac{1}{10}$, bet to daryti nepatartina. Žinoma, visų tų trupmenų suma lygi 1.
Dažnių ir santykinių dažnių reikšmes surašykime vienoje lentelėje:

$x_i =$	160	162	164	165	167	168	170	172	175
$f_i =$	2	3	2	2	1	3	4	1	2
$\frac{f_i}{n} =$	$\frac{2}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{4}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{2}{20}$

1c.

Imties duomenis galima vaizduoti grafiškai.
Dažniausiai duomenys vaizduojami stulpeline arba skrituline diagramomis.
Stulpelinėje diagramoje horizontalioje (arba vertikalioje) tiesėje atidedame skirtingas duomenų reikšmes (tarp jų palikdami vienodus tarpelius), o tai tiesei statmename skaičių spindulyje (dažnių ašyje) surašome dažnius (arba santykinius dažnius).
Nubraižę stulpelius, kurių aukščiai lygūs dažniams (santykiniams dažniams), gauname stulpelinę diagramą.
Braižant skritulinę diagramą, skritulys dalijamas į tiek sektorių, kiek yra skirtingų imties duomenų. Sektorių centriniai kampai turi būti proporcingi tuos kampus atitinkančių duomenų dažniams.
Duomenį x_i atitinkantis centrinis kampas lygus $360^\circ : n \cdot f_i$; čia n — duomenų skaičius, f_i — duomens x_i dažnis.

Stulpelinę *dažnių diagramą* braižome remdamiesi dažnių lentele (ją sudarėme **1b**).



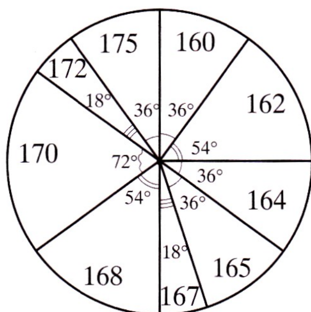
Braižydami skritulinę diagramą taip pat remsimės dažnių lentele. Apskaičiuokime duomenį 160 atitinkančio centrinio kampo dydį. Visas skritulys turi 360°, iš viso yra 20 duomenų, vadinasi, vieną duomenį atitinka

$$360^\circ : 20 = 18^\circ$$

dydžio kampas. Kadangi duomuo 160 duotojoje imtyje pasikartoja du kartus, tai jį atitinkantis kampas bus

$$18^\circ \cdot 2 = 36^\circ.$$

Tokius pačius kampus atitiks ir duomenys 164, 165, 175 (jų dažniai lygūs 2).
Duomenis 162 ir 168 atitiks $18^\circ \cdot 3 = 54^\circ$ dydžio kampai, duomenį 170 atitiks $18^\circ \cdot 4 = 72^\circ$ dydžio kampas, o duomenis 167 ir 172 — 18° dydžio kampai.



Pastaba. Kai skirtingų duomenų yra gana didelis skaičius, tai dažniausiai duomenys vaizduojami stulpeline diagrama, skritulinė diagrama yra nevaizdi.

1d. Kai yra daug skirtingų duomenų, tai jie dažnai grupuojami į vienodo ilgio intervalus.

Intervalo [160; 175] ilgis lygus $175 - 160 = 15$. Kiekvieno iš 5 intervaliukų ilgis bus $15 : 5 = 3$. Vadinasi, intervalą [160; 175] padalijame į tokius penkis intervalus:

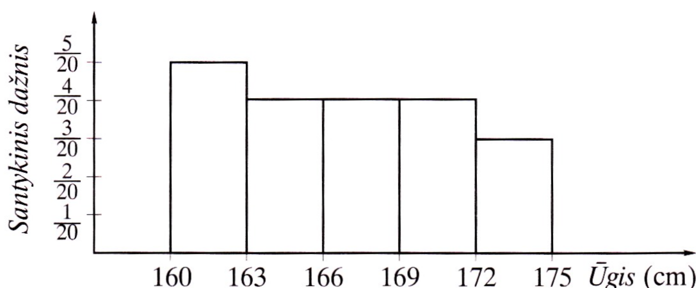
$$[160; 163), \quad [163; 166), \quad [166; 169), \quad [169; 172), \quad [172; 175].$$

Sudarome į tuos intervalus sugrupuotos imties dažnių ir santykinių dažnių lentelę:

Intervalas	[160;163)	[163;166)	[166;169)	[169; 172)	[172;175]
Dažnis, $f_i =$	5	4	4	4	3
Santykinis dažnis, $\frac{f_i}{n} =$	$\frac{5}{20}$	$\frac{4}{20}$	$\frac{4}{20}$	$\frac{4}{20}$	$\frac{3}{20}$

Dažnių eilutėje rašome skaičių duomenų, patenkančių į atitinkamą intervalą. Pavyzdžiui, į intervalą [160; 163) patenka 5 duomenys: 160, 160, 162, 162, 162.

1e. Sugrupuotos imties santykinių dažnių stulpelinė diagrama vadinama *histograma*. Histogramoje stulpeliai yra susiglaudę.



2a. Apskaičiuokite imties 5, 6, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 8, 9, 9, 9, 10, 10, 10, 10 medianą, kvartilius ir modą.

> Dažniausiai pasikartojęs imties duomuo vadinamas tos imties ***moda*** (žymima M_o).
> Skaičius, už kurį yra *ne didesni* ne mažiau kaip ketvirtadalis duomenų ir *ne mažesni* ne mažiau kaip trys ketvirtadaliai duomenų, vadinamas ***pirmuoju kvartiliu*** (žymima Q_1).
> Skaičius, už kurį yra ne didesni ne mažiau kaip pusė duomenų ir ne mažesni ne mažiau kaip pusė duomenų, vadinamas ***antruoju kvartiliu*** arba ***mediana*** (žymima Q_2 arba M_d).
> Skaičius, už kurį yra ne didesni ne mažiau kaip trys ketvirtadaliai duomenų ir ne mažesni ne mažiau kaip ketvirtadalis duomenų, vadinamas ***trečiuoju kvartiliu*** (žymima Q_3).

Dažniausiai imtyje

5, 6, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 8, 9, 9, 9, 10, 10, 10, 10

pasikartoja duomuo 6 ir duomuo 10 — po 4 kartus.
Vadinasi, imtis turi dvi modas:

$$M_o = 6, \quad M_o = 10.$$

Pastaba. Imtis modos gali ir neturėti — kai visi duomenys pasikartoja po vienodai kartų.

Ieškodami kvartilių, imtį suskirstome į ketvirtadalius. Kadangi imtyje yra 16 duomenų, tai kiekviename ketvirtadalyje jų bus po 4.

5, 6, 6, 6, | 6, 7, 7, 7, | 8, 9, 9, 9, | 10, 10, 10, 10

Q_1 $\quad Q_2 = M_d$ $\quad Q_3$

$$Q_1 = \frac{6+6}{2} = 6, \quad Q_2 = M_d = \frac{7+8}{2} = 7{,}5, \quad Q_3 = \frac{9+10}{2} = 9{,}5.$$

Atsakymas. $M_o = 6$, $M_o = 10$, $Q_1 = 6$, $Q_2 = M_d = 7{,}5$, $Q_3 = 9{,}5$.

2b. Surašyti dviejų klasių mokinių anglų kalbos kontrolinio darbo pažymiai:
11A: 10, 8, 7, 6, 7, 9, 8, 7, 7, 7, 6, 5, 4, 7, 7;
11B: 2, 4, 5, 6, 6, 9, 6, 4, 5, 7, 10, 5, 6, 6.
Raskite kiekvienos imties modą, medianą ir kvartilius.

Surašome pažymius nemažėjančia tvarka:

11A: 4, 5, 6, 6, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 8, 8, 9, 10.

Dažniausiai pasikartoja pažymys 7. Vadinasi, pažymių moda

$$M_o = 7.$$

Imties duomenų skaičius 15 nesidalija iš 4 — todėl suskirstyti imtį lygiais ketvirtadaliais kaip **1a** nepavyks.

Pirmiausia raskime medianą.

> Kai imtyje yra nelyginis skaičius duomenų, tai mediana lygi viduriniajam duomeniui. Kai imtyje yra lyginis skaičius duomenų, tai mediana lygi viduriniųjų dviejų duomenų aritmetiniam vidurkiui.

15-kos pažymių mediana lygi viduriniajam (8-tam) pažymiui:

$$\underbrace{4, 5, 6, 6, 7, 7, 7}_{\substack{7 \\ \text{pažymiai}}}, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Mediana}}}{7}, \underbrace{7, 7, 7, 8, 8, 9, 10}_{\substack{7 \\ \text{pažymiai}}}$$

Vadinasi, mediana ir antrasis kvartilis

$$M_d = Q_2 = 7.$$

Raskime pirmąjį kvartilį. Galima galvoti taip. Dalykime 15 iš 4 (raskime, kiek duomenų sudaro lygiai ketvirtadalį):

$$15 : 4 = 3{,}75.$$

Tai reiškia, kad ieškomas skaičius (pirmasis kvartilis) yra *ne mažesnis* už 4-ąjį (iš kairės) duomenį. O kadangi pirmasis kvartilis turi būti ir *ne didesnis* už ne mažiau kaip tris ketvirtadalius ($15 : 4 \cdot 3 = 11{,}25$) duomenų, tai jis yra ne didesnis už 12-ąjį (iš dešinės) duomenį. Tai galima pavaizduoti tokia schema:

```
         3,75
1  2  3 | 4
4, 5, 6,| 6,| 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 8, 8, 9, 10
          12| 11 10 9  8  7  6  5  4  3  2  1
          11,25
```

4-tasis iš kairės ir 12-tasis iš dešinės yra tas pats duomuo. Jis lygus 6. Vadinasi, $Q_1 = 6$.
Raskime trečiąjį kvartilį.
Kadangi $\frac{3}{4} \cdot 15 = 11{,}25$, tai trečiasis kvartilis yra ne mažesnis už 12-tąjį iš kairės ir ne didesnis už 4-tąjį iš dešinės:

```
                                   11,25
1  2  3  4  5  6  7  8  9  10 11 | 12
4, 5, 6, 6, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, | 8,| 8, 9, 10
                                   4 | 3  2  1
                                   3,75
```

Vadinasi, $Q_3 = 8$.
Raskime 11B klasės reikiamas skaitines charakteristikas:

$$2, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 6, 7, 9, 10.$$

Dažniausiai pasikartoja pažymys 6, vadinasi, tų pažymių moda

$M_o = 6$.

Pažymių skaičius lygus 14 (14 : 2 = 7; 14 : 4 = 3,5; 14 : 4 · 3 = 10,5).

3,5 7 10,5
1 2 3 | 4 5 6 7 | 8 9 10 | 11 12 13 14
2, 4, 4, | **5**, | 5, 5, **6**, | **6**, 6, 6, | **6**, | 7, 9, 10
14 13 12 11 | 10 9 8 | 7 6 5 4 | 3 2 1
10,5 7 3,5

$Q_1 = 5$ $Q_3 = 6$

$Q_2 = \frac{6+6}{2} = 6$

Atsakymas. 11A: $M_o = 7$, $M_d = Q_2 = 7$, $Q_1 = 6$, $Q_3 = 8$;
11B: $M_o = 6$, $M_d = Q_2 = 6$, $Q_1 = 5$, $Q_3 = 6$.

Pastaba. Rasti duomenų medianą (antrąjį kvartilį) santykinai lengviau negu rasti pirmąjį ir trečiąjį kvartilius (nors visų trijų kvartilių kilmė yra ta pati)...
Vadovėliuose galima rasti tokį kvartilių nustatymo būdą (jį galima pavadinti sukauptųjų dažnių skaičiavimu). Remdamiesi „sukauptaisiais dažniais“ raskime 11A pažymių kvartilius.

$x_i =$	4	5	6	7	8	9	10	
$f_i =$	1	1	2	7	2	1	1	← dažniai
$\frac{f_i}{n} =$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	← santykiniai dažniai
$f_1 + f_2 + \dots + f_i =$	1	2	4	11	13	14	15	← sukauptieji dažniai Pvz., duomens 6 sukauptasis dažnis lygus už jį ne didesnių dažnių sumai: 1 + 1 + 2 = 4.
$\frac{f_1 + f_2 + \dots + f_i}{n} =$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{11}{15}$	$\frac{13}{15}$	$\frac{14}{15}$	$\frac{15}{15}$	

Ieškodami kvartilių remsimės paskutiniąja lentelės eilute, kurioje surašyti sukauptieji santykiniai dažniai.

Raskime pirmąjį kvartilį. Tarp sukauptųjų santykinių dažnių ieškokime to, kuris yra ***ne mažesnis*** už $\frac{1}{4}$ ir yra pats mažiausias:

$$\frac{1}{15} < \frac{1}{4}, \quad \frac{2}{15} < \frac{1}{4}, \quad \frac{4}{15} > \frac{1}{4}.$$

Toks skaičius yra $\frac{4}{15}$. Jį atitinkantis duomuo ir yra pirmasis kvartilis, t. y. $Q_1 = 6$.
Raskime antrąjį kvartilį. Tarp sukauptųjų santykinių dažnių ieškome mažiausio, bet ***ne mažesnio*** už $\frac{1}{2}$:

$$\frac{1}{15} < \frac{1}{2}, \quad \frac{2}{15} < \frac{1}{2}, \quad \frac{4}{15} < \frac{1}{2}, \quad \frac{11}{15} > \frac{1}{2}.$$

Toks skaičius yra $\frac{11}{15}$. Jį atitinka duomuo 7. Vadinasi, $Q_2 = 7$.

Raskime Q_3. Ieškome sukauptojo santykinio dažnio, kuris būtų pats mažiausias ir ne mažesnis už $\frac{3}{4}$:

$$\frac{1}{15} < \frac{3}{4}, \quad \frac{2}{15} < \frac{3}{4}, \quad \frac{4}{15} < \frac{3}{4}, \quad \frac{11}{15} < \frac{3}{4}, \quad \frac{13}{15} > \frac{3}{4}.$$

Skaičių $\frac{13}{15}$ atitinka duomuo 8, vadinasi, $Q_3 = 8$.
Analogiškai raskime 11B pažymių kvartilius.

$x_i =$	2	4	5	6	7	9	10
$f_i =$	1	2	3	5	1	1	1
$\frac{f_i}{n} =$	$\frac{1}{14}$	$\frac{2}{14}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{14}$
$f_1 + f_2 + \cdots + f_i =$	1	3	6	11	12	13	14
$\frac{f_1 + f_2 + \cdots + f_i}{n} =$	$\frac{1}{14}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{6}{14}$	$\frac{11}{14}$	$\frac{12}{14}$	$\frac{13}{14}$	$\frac{14}{14}$

$$\frac{1}{14} < \frac{1}{4}, \quad \frac{3}{14} < \frac{1}{4}, \quad \frac{6}{14} > \frac{1}{4} \Rightarrow Q_1 = 5;$$
$$\frac{1}{14} < \frac{1}{2}, \quad \frac{3}{14} < \frac{1}{2}, \quad \frac{6}{14} < \frac{1}{2}, \quad \frac{11}{14} > \frac{1}{2} \Rightarrow Q_2 = 6;$$
$$\frac{1}{14} < \frac{3}{4}, \quad \frac{3}{14} < \frac{3}{4}, \quad \frac{6}{14} < \frac{3}{4}, \quad \frac{11}{14} > \frac{3}{4} \Rightarrow Q_3 = 6.$$

2c. Raskite atsitiktinio dydžio modą, medianą ir kvartilius, kai atsitiktinio dydžio skirstinys yra:

$x_i =$	-3	2	4	6	7	9	10
$p_i =$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{4}{16}$

Sąlygos lentelę reikia suprasti taip:
duomens -3 tikimybė lygi $\frac{2}{16}$, duomens 2 tikimybė lygi $\frac{2}{16}$, ... (ta lentelė yra analogiška duomenų santykinių dažnių lentelei). Antrosios eilutės skaičių (tikimybių) suma lygi 1.
Pervedę lentelę į „duomenų dažnių“ kalbą turėtume, kad skaičius -3 imtyje pasikartoja 2 kartus, ..., skaičius 10 — pasikartoja 4 kartus. Iš viso imtyje yra 16 duomenų (7 skirtingi).
I būdas. Atsitiktinio dydžio moda — didžiausią tikimybę turinti reikšmė. Didžiausią tikimybę (ji lygi $\frac{4}{16}$) turi atsitiktinio dydžio reikšmė 10, vadinasi:

$$M_o = 10.$$

Raskime kvartilius.

Kadangi reikšmių nedaug (16), tai galima susirašyti visas reikšmes nemažėjančia tvarka:

$$-3, -3, 2, 2, \mid 4, 4, 6, 6, \mid 7, 9, 9, 9, \mid 10, 10, 10, 10$$

$$Q_1 = \frac{2+4}{2} = 3 \qquad Q_3 = \frac{9+10}{2} = 9{,}5$$

$$Q_2 = M_d = \frac{6+7}{2} = 6{,}5$$

II būdas. O dabar kvartilius raskime remdamiesi sukauptaisiais dažniais. Dabar galime remtis tuo, kad duomens x_i tikimybė p_i (jos duotos sąlygoje) reiškia to duomens santykinį dažnį. Sąlygos lentelę papildykime eilute, kurioje surašykime sukauptąsias tikimybes (sukauptuosius santykinius dažnius).

$x_i =$	-3	2	4	6	7	9	10
$p_i =$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{4}{16}$
$p_1 + p_2 + \cdots + p_n =$	$\frac{2}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{8}{16}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{12}{16}$	$\frac{16}{16}$

Raskime Q_1:

$$\frac{2}{16} < \frac{1}{4}, \qquad \frac{4}{16} = \frac{1}{4}.$$

Šiuo atveju Q_1 skaičiuojame rasdami lentelės duomens 2 ir jam gretimo iš dešinės duomens 4 vidurkį:

$$Q_1 = \frac{2+4}{2} = 3.$$

Raskime Q_2:

$$\frac{8}{16} = \frac{1}{2}.$$

Vadinasi, $Q_2 = \frac{6+7}{2} = 6{,}5$.
Raskime Q_3:

$$\frac{12}{16} = \frac{3}{4}.$$

Vadinasi, $Q_3 = \frac{9+10}{2} = 9{,}5$.

Atsakymas. $M_o = 10$, $Q_1 = 3$, $Q_2 = M_d = 6{,}5$, $Q_3 = 9{,}5$.

3. Miesto matematikos olimpiadoje dalyvavo trys vienos mokyklos mokiniai. Reikėjo išspręsti 10 uždavinių, kurių kiekvienas buvo vertinamas nuo 0 iki 10 balų. Mokinių rezultatai pateikti lentelėje.

Uždavinio Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Andrius	7	6	3	9	4	6	9	5	9	9
Bronius	4	5	8	2	7	5	2	5	8	8
Raminta	6	4	3	9	9	8	7	6	4	7

Apskaičiuokite kiekvieno mokinio surinktų balų vidurkį ir dispersiją.

Vidurkis lygus duomenų sumai, padalytai iš duomenų skaičiaus. Imties $x_1, x_2, ..., x_n$ vidurkis:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}.$$

Imties $x_1, x_2, ..., x_n$ ***dispersija*** vadiname skaičių:

$$s^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2}{n - 1}.$$

Andriaus balų vidurkis:

$$\bar{x}_A = \frac{7+6+3+9+4+6+9+5+9+9}{10} = \frac{67}{10} = 6{,}7.$$

Broniaus balų vidurkis:

$$\bar{x}_B = \frac{4+5+8+2+7+5+2+5+8+8}{10} = \frac{54}{10} = 5{,}4.$$

Ramintos balų vidurkis:

$$\bar{x}_R = \frac{6+4+3+9+9+8+7+6+4+7}{10} = \frac{63}{10} = 6{,}3.$$

Andriaus balų dispersija:

$$\begin{aligned} s_A^2 &= \frac{(7-6{,}7)^2 + (6-6{,}7)^2 + (3-6{,}7)^2 + (9-6{,}7)^2 + (4-6{,}7)^2 + (6-6{,}7)^2}{10-1} + \\ &\quad + \frac{(9-6{,}7)^2 + (5-6{,}7)^2 + (9-6{,}7)^2 + (9-6{,}7)^2}{10-1} = \\ &= \frac{0{,}3^2 + 0{,}7^2 + 3{,}7^2 + 2{,}3^2 + 2{,}7^2 + 0{,}7^2 + 2{,}3^2 + 1{,}7^2 + 2{,}3^2 + 2{,}3^2}{9} = \\ &= \frac{0{,}3^2 + 2 \cdot 0{,}7^2 + 3{,}7^2 + 4 \cdot 2{,}3^2 + 2{,}7^2 + 1{,}7^2}{9} = \\ &= \frac{0{,}09 + 0{,}98 + 13{,}69 + 21{,}16 + 7{,}29 + 2{,}89}{9} = \\ &= \frac{46{,}1}{9} = 5{,}1(2). \end{aligned}$$

Broniaus balų dispersija:

$$s_B^2 = \frac{(4-5{,}4)^2 + (5-5{,}4)^2 + (8-5{,}4)^2 + (2-5{,}4)^2 + (7-5{,}4)^2 + (5-5{,}4)^2}{10-1} +$$
$$+ \frac{(2-5{,}4)^2 + (5-5{,}4)^2 + (8-5{,}4)^2 + (8-5{,}4)^2}{10-1} =$$
$$= \frac{1{,}4^2 + 0{,}4^2 + 2{,}6^2 + 3{,}4^2 + 1{,}6^2 + 0{,}4^2 + 3{,}4^2 + 0{,}4^2 + 2{,}6^2 + 2{,}6^2}{9} =$$
$$= \frac{1{,}96 + 0{,}16 + 6{,}76 + 11{,}56 + 2{,}56 + 0{,}16 + 11{,}56 + 0{,}16 + 6{,}76 + 6{,}76}{9} =$$
$$= \frac{48{,}4}{9} = 5{,}3(7).$$

Ramintos balų dispersija:

$$s_R^2 = \frac{(6-6{,}3)^2 + (4-6{,}3)^2 + (3-6{,}3)^2 + (9-6{,}3)^2 + (9-6{,}3)^2 + (8-6{,}3)^2}{10-1} +$$
$$+ \frac{(7-6{,}3)^2 + (6-6{,}3)^2 + (4-6{,}3)^2 + (7-6{,}3)^2}{10-1} =$$
$$= \frac{0{,}3^2 + 2{,}3^2 + 3{,}3^2 + 2{,}7^2 + 2{,}7^2 + 1{,}7^2 + 0{,}7^2 + 0{,}3^2 + 2{,}3^2 + 0{,}7^2}{9} =$$
$$= \frac{0{,}09 + 5{,}29 + 10{,}89 + 7{,}29 + 7{,}29 + 2{,}89 + 0{,}49 + 0{,}09 + 5{,}29 + 0{,}49}{9} =$$
$$= \frac{40{,}1}{9} = 4{,}4(5).$$

Nurodymas. Tokius skaičiavimus geriausia atlikti skaičiuokliu.

Atsakymas. $\bar{x}_A = 6{,}7$, $\bar{x}_B = 5{,}4$, $\bar{x}_R = 6{,}3$;
$s_A^2 = 5{,}1(2)$, $s_B^2 = 5{,}3(7)$, $s_R^2 = 4{,}4(5)$.

4. Duotos funkcijos $f(x) = \ln x + 2$ ir $g(x) = 2x - 3$.

1) Raskite kiekvienos funkcijos apibrėžimo sritį.
2) Raskite $f'(x)$ ir $g'(x)$.
3) Išspręskite lygtį $f'(x) = g'(x)$.

4.1. Funkcija $f(x) = \ln x + 2$ yra apibrėžta su tomis x reikšmėmis, su kuriomis $\ln x$ turi prasmę.

> $\log_{g(x)} f(x)$ turi prasmę, kai $f(x) > 0$, $g(x) > 0$, $g(x) \neq 1$.
> $\log_{e} f(x) = \ln f(x)$ (e $\approx 2{,}7$).

$\ln x$ turi prasmę, kai $x > 0$. Vadinasi, funkcija $f(x)$ apibrėžta, kai

$$x \in (0; +\infty).$$

Funkcija $g(x) = 2x - 3$ apibrėžta su visais x, nes reiškinys $2x - 3$ turi prasmę su visomis x reikšmėmis. Vadinasi, $g(x)$ apibrėžta, kai

$$x \in (-\infty; +\infty).$$

4.2.

$(A + B)' = A' + B'$,
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$,
$(\text{const})' = 0$.

Randame $f(x)$ išvestinę:

$$f'(x) = (\ln x + 2)' = (\ln x)' + 2' = \frac{1}{x} + 0 = \frac{1}{x};$$

$(ax + b)' = a$, čia a ir b — skaičiai.

Randame $g(x)$ išvestinę:

$$g'(x) = (2x - 3)' = 2.$$

4.3. Sprendžiame lygtį:

$$\frac{1}{x} = 2, \quad x = \frac{1}{2}.$$

Patikriname, ar $x = \frac{1}{2}$ priklauso funkcijų $f(x)$ ir $g(x)$ apibrėžimo sritims: $\frac{1}{2} \in (0; +\infty)$.

Atsakymas. 1) $D_f = (0; +\infty)$, $D_g = (-\infty; +\infty)$;
2) $f'(x) = \frac{1}{x}$, $g'(x) = 2$; 3) $x = \frac{1}{2}$.

5. Atstumas tarp miestų A ir B lygus 100 km. Iš miesto A į miestą B tuo pačiu metu išvyksta du automobiliai. Pirmojo automobilio greitis yra 10 km/h didesnis negu antrojo. Žinoma, kad pirmasis automobilis 50 minučių buvo sustojęs. Raskite visas pirmojo automobilio greičio reikšmes, su kuriomis jis atvyksta į miestą B ne vėliau negu antrasis automobilis.

Sakykime, pirmojo automobilio greitis lygus v (km/h), tada antrojo automobilio greitis lygus $v - 10$ (km/h). Antrasis automobilis 100 km nuvažiuoja per (kelionėje užtrunka):

$$\frac{100}{v - 10} \text{ (h)} \qquad (1)$$

$s = v \cdot t$, $\quad s$ — kelias, v — greitis, t — laikas;
$t = \frac{s}{v}$.

Kadangi pirmasis automobilis stovėjo

$$50\,\text{min} = \frac{50}{60}\,\text{h} = \frac{5}{6}\,\text{h},$$

tai jis kelionėje užtrunka

$$\frac{100}{v} + \frac{5}{6} \text{ (h)}. \qquad (2)$$

Reikia rasti tas v reikšmes, su kuriomis (2) reiškinys įgyja ne didesnes reikšmes už (1) reiškinį, t. y. reikia išspręsti nelygybę:

$$\frac{100}{v}+\frac{5}{6}\leqslant\frac{100}{v-10}.$$

Trupmenų vardikliai v, 6, $v-10$ yra teigiami (antraip uždavinys neturi prasmės), todėl nelygybės abi puses galima dauginti iš $v\cdot 6\cdot(v-10)$ (>0):

$$\frac{100}{v}+\frac{5}{6}\leqslant\frac{100}{v-10}\ \Big|\cdot v\cdot 6\cdot(v-10),$$

$$100\cdot 6\cdot(v-10)+5\cdot v\cdot(v-10)\leqslant 100\cdot v\cdot 6,$$

$$600v-6000+5v^2-50v\leqslant 600v,$$

$$5v^2-50v-6000\leqslant 0,$$

$$v^2-10v-1200\leqslant 0.$$

Kairiąją pusę skaidome dauginamaisiais:

$$v^2-10v-1200=0,$$

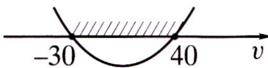
$$D=(-10)^2-4\cdot 1\cdot(-1200)=4900=70^2,$$

$$v_1=\frac{10-70}{2}=-30,\quad v_2=\frac{10+70}{2}=40,$$

$$v^2-10v-1200=(v+30)(v-40).$$

Gavome

$$(v+30)(v-40)\leqslant 0.$$



Nelygybės sprendiniai:

$$v\in[-30;40].$$

Pagal uždavinio sąlygą tinka tik v reikšmės, didesnės už 10 $(v-10>0)$.
Vadinasi, kai pirmojo automobilio greitis yra intervalo $(10; 40]$ skaičius, tai tas automobilis į B atvyks ne vėliau už antrąjį automobilį.

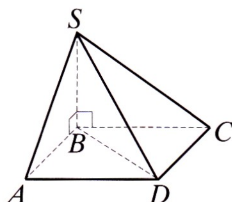
Atsakymas. $v\in(10;40]$.

Tiesės ir plokštumos

K12 (16.1–16.6)

1. K ir L — kubo $ABCDA_1B_1C_1D_1$ briaunų AD ir CD vidurio taškai. Įrodykite, kad tiesė KL yra lygiagreti plokštumai AA_1C.

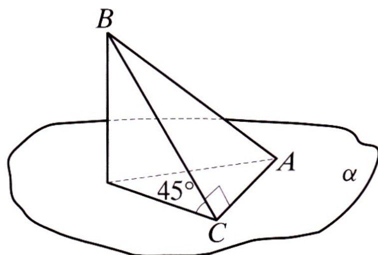
2. $SABCD$ – piramidė, $\angle SBA = \angle SBC = 90^\circ$. Nustatykite trikampio SBD rūšį pagal kampus. Atsakymą pagrįskite.



3. Iš to paties taško į plokštumą nubrėžtos dvi pasvirosios. Vienos jų ilgis yra 15 cm, o kitos — 20 cm. Vienos pasvirosios projekcijos į duotąją plokštumą ilgis yra 16 cm. Raskite kitos pasvirosios projekcijos į duotąją plokštumą ilgį.

4. Vieno stulpo aukštis nuo žemės yra 5,8 m, o kito — 3,9 m. Atstumas tarp šių stulpų prie žemės yra 3,4 m. Apskaičiuokite atstumą tarp šių stulpų viršutinių galų.

5. Stačiojo trikampio ABC ($\angle C = 90^\circ$) statinis AC yra plokštumoje α. Trikampio plokštuma su plokštuma α sudaro 45° kampą. Apskaičiuokite atstumą nuo viršūnės B iki plokštumos α, jei $AC = 2$ m, o $AB : BC = 3 : 1$.

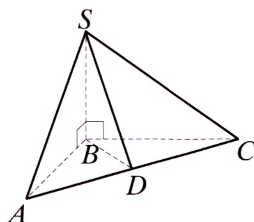


6. Piramidės pagrindas yra kvadratas. Piramidės aukštinė eina per vieną pagrindo viršūnę. Apskaičiuokite piramidės kiekvienos sienos plotą, kai pagrindo kraštinės ilgis yra 20 dm, o aukštinės ilgis yra 21 dm.

7. Iš lygiakraščio trikampio ABC viršūnės išvestas statmuo AD trikampio plokštumai. Apskaičiuokite atstumą nuo taško D iki tiesės BC, kai $AD = 1$ dm, $BC = 8$ dm.

1. P ir K — tetraedro $SABC$ briaunų AB ir AC vidurio taškai. Įrodykite, kad tiesė PK yra lygiagreti plokštumai SBC.

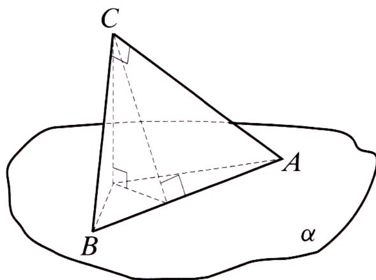
2. $SABC$ — piramidė, $SB \perp AB$, $SB \perp BC$. Taškas D priklauso briaunai AC. Nustatykite trikampio SBD rūšį pagal kampus. Atsakymą pagrįskite.



3. Iš to paties taško į plokštumą nubrėžtos dvi pasvirosios. Vienos jų ilgis yra 10 cm, o kitos — 17 cm. Pirmos pasvirosios projekcijos į duotąją plokštumą ilgis yra 6 cm. Raskite kitos pasvirosios projekcijos į duotąją plokštumą ilgį.

4. Namo aukštis yra 20 m. Netoli namo esančio stulpo aukštis yra 8 m. Atstumas tarp stulpo viršutinio galo ir namo stogo yra 15 m. Apskaičiuokite atstumą tarp stulpo ir namo prie žemės.

5. Stačiojo trikampio ABC ($\angle C = 90^\circ$) statinių ilgiai yra 7 cm ir 24 cm. Per trikampio įžambinę nubraižyta plokštuma, kuri su trikampio plokštuma sudaro 30° kampą. Apskaičiuokite atstumą nuo stačiojo kampo viršūnės iki plokštumos α.



6. Piramidės $SABC$ pagrindas yra statusis trikampis ABC, kurio įžambinė $AB = 26$ cm, o statinis $AC = 24$ cm. Briauna SA statmena piramidės pagrindo ABC plokštumai. Apskaičiuokite piramidės kiekvienos sienos plotą, kai $SA = 18$ cm.

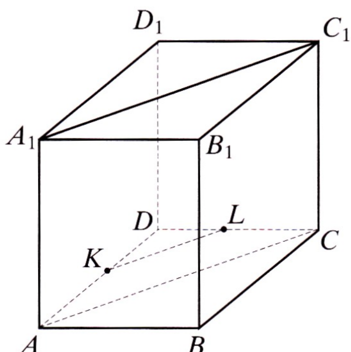
7. Iš kvadrato $ABCD$ viršūnės išvestas statmuo AE kvadrato plokštumai. Apskaičiuokite atstumą nuo taško E iki tiesės BD, kai $AE = 2$ dm, $AB = 8$ dm.

Tiesės ir plokštumos

K12 (16.1–16.6)

1. K ir L — kubo $ABCDA_1B_1C_1D_1$ briaunų AD ir CD vidurio taškai. Įrodykite, kad tiesė KL yra lygiagreti plokštumai AA_1C.

Sprendimas. Nusibraižome brėžinį, užsirašome, kas duota ir ką reikia įrodyti.

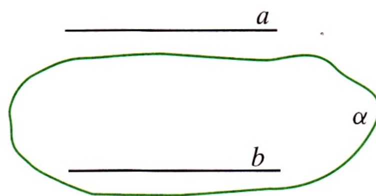


Duota: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — kubas,
$AK = KD$, $DL = LC$.
Įrodyti: $KL \parallel AA_1C$.

Pastebime, kad plokštuma AA_1C sutampa su plokštuma AA_1C_1C, t. y. sąlygoje nurodyta plokštuma eina per kubo įstrižaininį pjūvį. Iš brėžinio akivaizdu, kad tiesė KL nėra plokštumoje AA_1C_1C. Reikia įsitikinti, kad KL nekerta tos plokštumos, t. y., kad

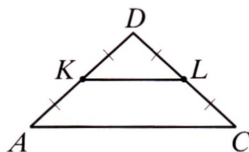
$$KL \parallel AA_1C_1C.$$

Jei tiesė a, nesanti plokštumoje α, yra lygiagreti kuriai nors plokštumos α tiesei b, tai tiesė a *lygiagreti* plokštumai α.



Jei $a \parallel b$ ($a \notin \alpha$, $b \in \alpha$), tai $a \parallel \alpha$

Vadinasi, reikia rasti plokštumos AA_1C_1C tiesę, kuri būtų lygiagreti KL.
Nagrinėkime trikampį ADC.



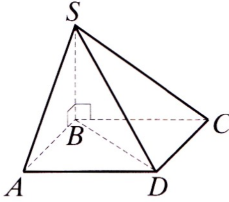
KL yra trikampio ADC vidurinė linija, nes

$$AK = KD, \quad DL = LC.$$

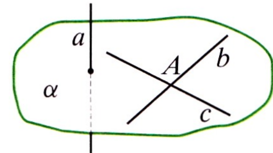
Trikampio vidurinė linija yra lygiagreti vienai trikampio kraštinei.

Vadinasi, $KL \parallel AC$.
Kadangi AC yra plokštumoje AA_1C_1C (AA_1C), tai $KL \parallel AA_1C$ — ką ir reikėjo įrodyti.

2. $SABCD$ – piramidė, $\angle SBA = \angle SBC = 90^\circ$. Nustatykite trikampio SBD rūšį pagal kampus. Atsakymą pagrįskite.



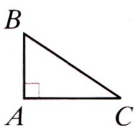
Jei tiesė a yra statmena kurioms nors dviem susikertančiom plokštumos α tiesėms, tai a statmena plokštumai α, t. y. tiesė a yra statmena bet kuriai plokštumos α tiesei.



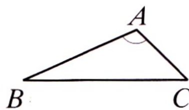
Jei $a \perp b, a \perp c$
$(b, c \in \alpha, b \cap c = A)$,
tai $a \perp \alpha$.

Akivaizdu, kad tiesė SB yra statmena piramidės pagrindo plokštumai $ABCD$, nes $SB \perp AB$ ir $SB \perp BC$ (SB statmena dviem susikertančioms tos plokštumos tiesėms).
Vadinasi, SB yra statmena ir bet kuriai kitai plokštumos $ABCD$ tiesei. O tai reiškia, kad kampas SBD yra status, t. y. $\angle SBD = 90^\circ$. Vadinasi, $\triangle SBD$ yra status.

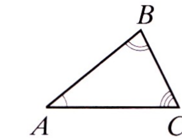
Trikampių rūšys pagal kampus



$\angle A = 90^\circ$
Statusis

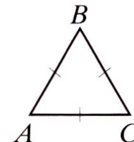


$\angle A > 90^\circ$
Bukasis

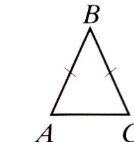


$\angle A, \angle B, \angle C < 90^\circ$
Smailusis

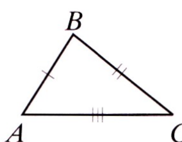
Trikampių rūšys pagal kraštines



$AB = BC = CA$
Lygiakraštis



$AB = BC \neq AC$
Lygiašonis

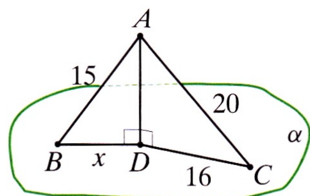


$AB \neq BC \neq CA$
Įvairiakraštis

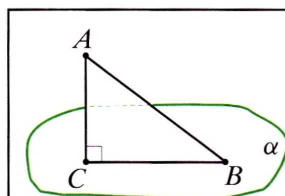
Atsakymas. Statusis.

3. Iš to paties taško į plokštumą nubrėžtos dvi pasvirosios. Vienos jų ilgis yra 15 cm, o kitos — 20 cm. Vienos pasvirosios projekcijos į duotąją plokštumą ilgis yra 16 cm. Raskite kitos pasvirosios projekcijos į duotąją plokštumą ilgį.

Sprendimas. Nusibraižome brėžinį.



Duota: $AB = 15$ cm, $AC = 20$ cm,
$AD \perp CD$, $AD \perp BD$, $CD = 16$ cm.
Rasti: BD.



$AB \not\perp \alpha$, $A \notin \alpha$, $B \in \alpha$, AB — pasviroji;
$AC \perp \alpha$, $C \in \alpha$, AC — statmuo, C — statmens pagrindas;
CB — pasvirosios AB projekcija plokštumoje α.

Akivaizdu, kad 16 cm ilgio yra pasvirosios $AC = 20$ cm projekcija (pasvirosios $AB = 15$ cm projekcijos ilgis bus mažesnis už 15 cm).
$\triangle ADC$ — status ($\angle D = 90°$). Remdamiesi Pitagoro teorema, apskaičiuojame AD ilgį:

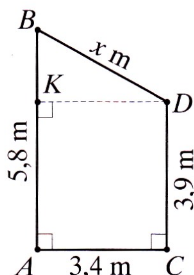
$$AD = \sqrt{20^2 - 16^2} = \sqrt{(20-16)(20+16)} = \sqrt{4 \cdot 36} = 2 \cdot 6 = 12 \text{ (cm)}.$$

$\triangle ADB$ — status ($\angle D = 90°$). Remdamiesi Pitagoro teorema, apskaičiuojame BD ilgį:

$$BD = \sqrt{15^2 - 12^2} = \sqrt{(15-12)(15+12)} = \sqrt{3 \cdot 27} = \sqrt{3 \cdot 3 \cdot 9} = 3 \cdot 3 = 9 \text{ (cm)}.$$

Atsakymas. 9 cm.

4. Vieno stulpo aukštis nuo žemės yra 5,8 m, o kito — 3,9 m. Atstumas tarp šių stulpų prie žemės yra 3,4 m. Raskite atstumą tarp šių stulpų viršutinių galų.



Duota: $AB = 5{,}8$ m, $CD = 3{,}9$ m, $AC = 3{,}4$ m.
Rasti: BD.

Nubrėžiame $DK \perp BA$. $AKDC$ — stačiakampis, $\triangle BKD$ — statusis trikampis, kurio statiniai:

$$DK = AC = 3{,}4 \text{ m}, \quad BK = BA - KA = BA - DC = 5{,}8 - 3{,}9 = 1{,}9 \text{ (m)}.$$

Apskaičiuojame įžambinės BD ilgį:

$$BD = \sqrt{3{,}4^2 + 1{,}9^2} = \sqrt{15{,}17} \text{ (m)}.$$

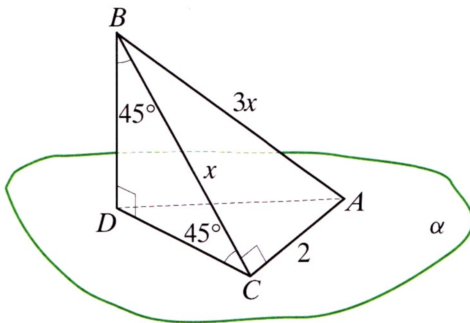
Atsakymas. $\sqrt{15.17}$ m.

5. Stačiojo trikampio ABC ($\angle C = 90^\circ$) statinis AC yra plokštumoje α. Trikampio plokštuma su plokštuma α sudaro 45° kampą. Raskite atstumą nuo viršūnės B iki plokštumos α, jei $AC = 2$ m, o $AB : BC = 3 : 1$.

Čia labai svarbu teisingai suprasti sąlygą.

- atstumas nuo taško B iki plokštumos α lygus statmens BD ilgiui ($D \in \alpha$, $BD \perp \alpha$);
- užrašas $AB : BC = 3 : 1$ reiškia, kad AB ilgis trigubai didesnis už BC ilgį, t. y. jei $BC = x$, tai $AB = 3x$.

Sąlygos brėžinį papildome, prieš tai pastebėję, kad $\triangle BDC$ yra ne tik status, bet ir lygiašonis ($\angle B = \angle C = 45^\circ$).



Duota: $BA = 3 \cdot BC$, $BD \perp \alpha$,
$\angle BCD = 45^\circ$, $\angle BCA = 90^\circ$,
$AC = 2$ m.
Rasti: BD.

Sprendimas. 1) Iš stačiojo $\triangle BCA$, remdamiesi Pitagoro teorema, apskaičiuojame x:

$$(3x)^2 = x^2 + 2^2, \quad 9x^2 = x^2 + 4, \quad 8x^2 = 4,$$
$$x^2 = \frac{1}{2}, \quad x = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(= \frac{\sqrt{2}}{2} \right).$$

2) Iš stačiojo lygiašonio $\triangle BDC$ apskaičiuojame BD ilgį:

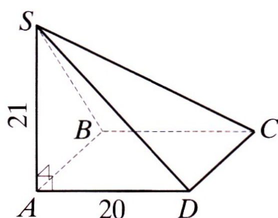
$$BD = DC = y, \quad BC = \frac{1}{\sqrt{2}},$$
$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = y^2 + y^2, \quad 2y^2 = \frac{1}{2}, \quad y^2 = \frac{1}{4}, \quad y = \frac{1}{2}.$$

Pastaba. BD ilgį galima apskaičiuoti ir remiantis stačiojo trikampio smailiojo kampo sinuso (kosinuso) apibrėžimu:

$$\sin 45^\circ = \frac{BD}{BC},$$
$$BD = BC \cdot \sin 45^\circ,$$
$$BD = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}.$$

Atsakymas. 0,5 m.

6. Piramidės pagrindas yra kvadratas. Piramidės aukštinė eina per vieną pagrindo viršūnę. Apskaičiuokite piramidės kiekvienos sienos plotą, kai pagrindo kraštinės ilgis yra 20 dm, o aukštinės ilgis yra 21 dm.



Duota: $SABCD$ — piramidė, $ABCD$ — kvadratas,
$SA \perp AB$, $SA \perp AD$,
$AB = BC = CD = DA = 20$ dm,
$SA = 21$ dm.
Rasti: S_{ABCD}, S_{ABS}, S_{ADS}, S_{DCS}, S_{BCS}.

Iš sąlygos aišku, kad piramidės aukštinė sutampa su viena jos šonine briauna (brėžinyje SA).

1) Piramidės pagrindas yra kvadratas, kurio kraštinė žinoma ($AD = 20$ dm), lieka apskaičiuoti pagrindo plotą:

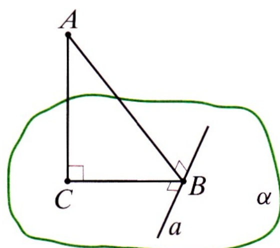
$$S_{ABCD} = AD^2 = 20^2 = 400\ (\text{dm}^2).$$

2) Dvi piramidės šoninės sienos yra statūs ir lygūs trikampiai ($\triangle SAD = \triangle SAB$), kurių statiniai yra žinomi. Skaičiuojame tų trikampių plotus:

$$S_{\triangle ADS} = S_{\triangle ABS} = \frac{20 \cdot 21}{2} = 210\ (\text{dm}^2).$$

3) Likusios dvi šoninės sienos taip pat yra lygūs ir statūs trikampiai ($\triangle SDC = \triangle SBC$). Kad tie trikampiai statūs, aišku iš trijų statmenų teoremos.

Trijų statmenų teorema. Jei plokštumos tiesė, einanti per pasvirosios pagrindą, yra statmena pasvirosios projekcijai, tai ji statmena ir pasvirajai.



$a \in \alpha$, AB — pasviroji, CB — pasvirosios AB projekcija plokštumoje α ($AC \perp \alpha$).

- Jei $a \perp CB$, tai $a \perp AB$.
- Jei $a \perp AB$, tai $a \perp CB$.

Iš tikrųjų, $\angle SDC = 90°$, nes CD yra plokštumoje $ABCD$ ir yra statmena AD (AD yra pasvirosios SD projekcija plokštumoje $ABCD$), tai $CD \perp SD$.
Trikampių SDC ir SBC plotus apskaičiuosime radę statinių SD (SB) ilgius.
Iš $\triangle SAD$ pagal Pitagoro teoremą:

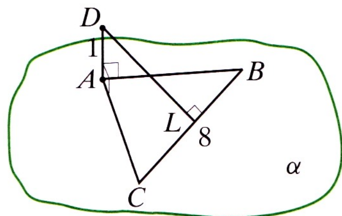
$$SD = \sqrt{21^2 + 20^2} = \sqrt{441 + 400} = \sqrt{841} = 29\ (\text{dm}).$$

Skaičiuojame trikampio SDC (sienos) plotą:

$$S_{\triangle SDC} = \frac{SD \cdot DC}{2} = \frac{29 \cdot 20}{2} = 290\ (\text{dm}^2), \quad S_{\triangle SBC} = S_{\triangle SDC} = 290\ \text{dm}^2.$$

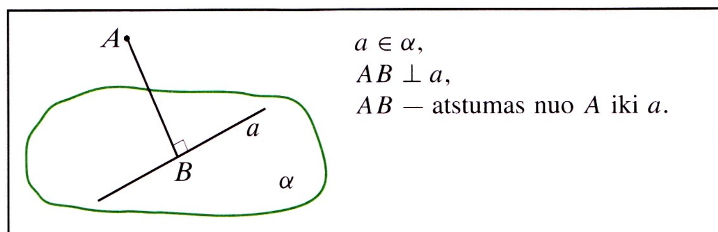
Atsakymas. $S_{ABCD} = 400\ \text{dm}^2$, $S_{ABS} = S_{ADS} = 210\ \text{dm}^2$, $S_{DCS} = S_{BCS} = 290\ \text{dm}^2$.

7. Iš lygiakraščio trikampio ABC viršūnės išvestas statmuo AD trikampio plokštumai. Apskaičiuokite atstumą nuo taško D iki tiesės BC, kai $AD = 1$ dm, $BC = 8$ dm.



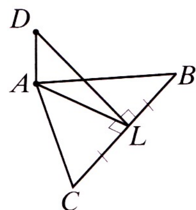
Duota: $\triangle ABC \in \alpha$,
$AB = BC = CA = 8$ dm,
$AD \perp \alpha$, $AD = 1$ dm.
Rasti: DL ($DL \perp CB$).

Čia svarbu suprasti, kad ieškomas atstumas nuo taško D iki tiesės BC yra atkarpos DL, kuri yra statmena CB, ilgis.



$a \in \alpha$,
$AB \perp a$,
AB — atstumas nuo A iki a.

Kadangi plokštumos α tiesė CB yra statmena pasvirajai DL, tai ji statmena ir pasvirosios projekcijai AL (trijų statmenų teorema). Papildome brėžinį projekcija.



Kadangi $AL \perp CB$, o $AC = AB$ ($\triangle ABC$ — lygiakraštis), tai AL yra pusiaukraštinė, t. y.

$$CL = LB = 8 : 2 = 4 \text{ (dm)}.$$

Iš stačiojo $\triangle ALC$ apskaičiuojame AL:

$$AL = \sqrt{AC^2 - CL^2} = \sqrt{8^2 - 4^2} = \sqrt{64 - 16} = \sqrt{48} \text{ (dm)}.$$

Iš stačiojo $\triangle DAL$ apskaičiuojame DL:

$$DL = \sqrt{AD^2 + AL^2} = \sqrt{1^2 + (\sqrt{48})^2} = \sqrt{1 + 48} = \sqrt{49} = 7 \text{ (dm)}.$$

Atsakymas. 7 dm.

Erdvės vektoriai

K13 (17.1–17.3)

1. Taškas K — tetraedro $ABCD$ briaunos BC vidurio taškas. Vektorių $\overrightarrow{DK}$ išreikškite vektoriais $\vec{a} = \overrightarrow{DA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$.

2. Suprastinkite reiškinį:

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{NM}$;

b) $\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{EP} + \overrightarrow{KD} - \overrightarrow{KA}$.

3. Raskite vektoriaus $\vec{p} = 3\vec{b} - 2\vec{a} + \vec{c}$ koordinates ir ilgį, kai $\vec{a}(-1; 2; 0)$, $\vec{b}(0; -5; -2)$, $\vec{c}(2; 1; -3)$.

4. a) Ar vektoriai $\vec{a}(3; 6; 8)$ ir $\vec{b}(6; 12; 16)$ yra kolinearūs?
b) Raskite tokius skaičius m ir n, su kuriais vektoriai $\vec{a}(4; m; n)$ ir $\vec{b}(n; 2; m^2)$ būtų kolinearūs.

5. Ar vektoriai $\vec{d}(1; -1; 2)$, $\vec{e}(-2; 0; 1)$ ir $\vec{f}(5; -1; 0)$ yra komplanarūs?

6. a) Apskaičiuokite $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c}$, kai $\angle(\vec{a}, \vec{c}) = \angle(\vec{b}, \vec{c}) = 60^\circ$, $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = |\vec{c}| = 2$.

b) Ar vektoriai $\vec{c}(0; -5; 2)$ ir $\vec{d}(-6; -3; 5)$ yra statmeni?

c) Duoti vektoriai $\vec{m}(-2; 4; 6)$ ir $\vec{n}(10; x; -2)$. Su kuria x reikšme $\vec{m} \cdot \vec{n} = 4$?

7. Įrodykite, kad trikampis, kurio viršūnės yra $A(6; -4; 2)$, $B(3; 2; 3)$ ir $C(3; -5; -1)$, yra statusis.

8. Duoti taškai $A(2; 2; -2)$, $B(1; 4; -4)$, $C(-6; 3; 0)$, $D(0; 6; -6)$. Raskite kampo tarp vektorių $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{CD}$ kosinusą.

9. Apskaičiuokite atstumą nuo koordinačių pradžios taško O iki atkarpos MN vidurio taško, kai žinomos atkarpos galų koordinatės $M(1; 2; -1)$ ir $N(-2; 1; 1)$.

1. Taškas L — tetraedro $ABCD$ briaunos AB vidurio taškas. Vektorių $\overrightarrow{DL}$ išreikškite vektoriais $\vec{a} = \overrightarrow{DA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$.

2. Suprastinkite reiškinį:

a) $\overrightarrow{FK} + \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{KP} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{OK} + \overrightarrow{PF}$;

b) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{EK} - \overrightarrow{EP} - \overrightarrow{MD}$.

3. Raskite vektoriaus $\vec{p} = 3\vec{c} - 2\vec{b} + \vec{a}$ koordinates ir ilgį, kai $\vec{a}(-1; 2; 0)$, $\vec{b}(0; -5; -2)$, $\vec{c}(2; 1; -3)$.

4. a) Ar vektoriai $\vec{a}(2; 6; 10)$ ir $\vec{b}(6; 18; 30)$ yra kolinearūs?
b) Raskite tokius skaičius m ir n, su kuriais vektoriai $\vec{a}(8; m; n)$ ir $\vec{b}(n; 4; m^2)$ būtų kolinearūs.

5. Ar vektoriai $\vec{d}(1; 0; 2)$, $\vec{e}(1; 1; -1)$ ir $\vec{f}(-1; 2; 4)$ yra komplanarūs?

6. a) Apskaičiuokite $(\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{c}$, kai $\angle(\vec{a}, \vec{c}) = \angle(\vec{b}, \vec{c}) = 45^\circ$, $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = |\vec{c}| = 4$.
b) Ar vektoriai $\vec{c}(-2; 1; -4)$ ir $\vec{d}(3; 4; -2)$ yra statmeni?
c) Duoti vektoriai $\vec{m}(-1; 2; 3)$ ir $\vec{n}(5; x; -1)$. Su kuria x reikšme $\vec{m} \cdot \vec{n} = -1$?

7. Įrodykite, kad trikampis, kurio viršūnės yra $A(3; -2; 1)$, $B(1{,}5; 1; 1{,}5)$ ir $C(1{,}5; -2{,}5; -0{,}5)$, yra statusis.

8. Duoti taškai $A(7; -8; 15)$, $B(8; -7; 13)$, $C(2; -3; 5)$, $D(-1; 0; 4)$. Raskite kampo tarp vektorių $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{CD}$ kosinusą.

9. Apskaičiuokite atstumą nuo koordinačių pradžios taško O iki atkarpos MN vidurio taško, kai žinomos atkarpos galų koordinatės $M(2; -1; 3)$ ir $N(-1; 3; 1)$.

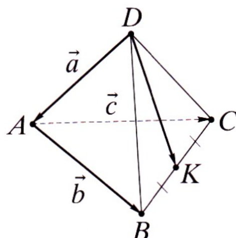
Erdvės vektoriai

K13 (17.1–17.3)

1. Taškas K — tetraedro $ABCD$ briaunos BC vidurio taškas. Vektorių $\overrightarrow{DK}$ išreikškite vektoriais $\vec{a} = \overrightarrow{DA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$.

Tetraedras — tai trikampė piramidė, kurios visos briaunos yra lygios.

Nusibraižykime brėžinį.



Čia galima elgtis įvairiai — svarbu vektorių $\overrightarrow{DK}$ išreikšti vektoriais $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

Galvoti galima, pavyzdžiui, taip.

$$\overrightarrow{DK} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CK} \quad \text{(pagal vektorių sumos trikampio taisyklę);}$$

$\overrightarrow{DC}$ gauname $\vec{a}$ sudėję su $\vec{c}$:

$$\overrightarrow{DC} = \vec{a} + \vec{c}.$$

$\overrightarrow{CK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$, o $\overrightarrow{CB}$ gauname iš $\vec{b}$ atėmę $\vec{c}$:

$$\overrightarrow{CB} = \vec{b} - \vec{c}.$$

Vadinasi,

$$\overrightarrow{DK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DC} = \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{c}) + \vec{a} + \vec{c}.$$

Galima gautą reiškinį suprastinti:

$$\frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{c}) + \vec{a} + \vec{c} = \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c} + \vec{a} + \vec{c} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}.$$

Galėjome galvoti ir taip:

$$\overrightarrow{DK} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BK},$$

$$\overrightarrow{DB} = \vec{a} + \vec{b}, \quad \overrightarrow{BK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(\vec{c} - \vec{b}),$$

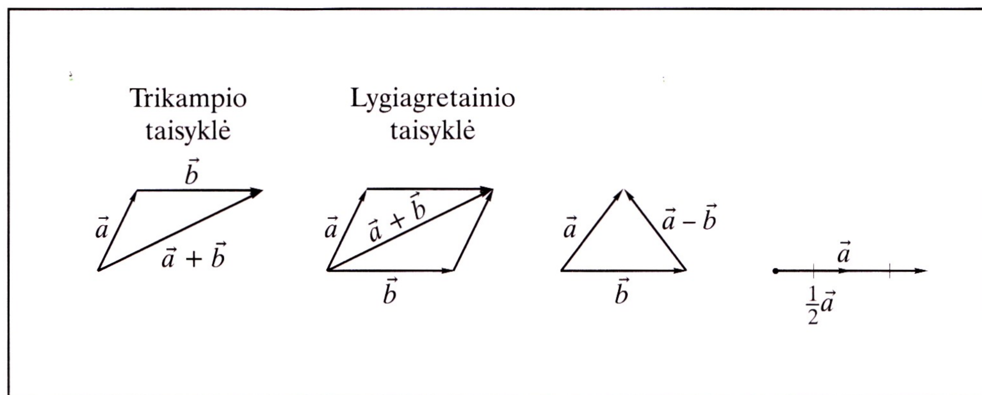
$$\overrightarrow{DK} = \vec{a} + \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c} - \frac{1}{2}\vec{b} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}.$$

Arba, pavyzdžiui, taip:

$$\overrightarrow{DK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DB}) \quad \text{(pagal vektorių sumos lygiagretainio taisyklę);}$$

$$\frac{1}{2}(\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DB}) = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{c} + \vec{a} + \vec{b}) = \frac{1}{2}(2\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}.$$

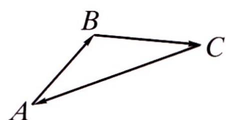
Svarbiausia šiame uždavinyje žinoti, kaip sudedami ir atimami vektoriai.



Atsakymas. $\overrightarrow{DK} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$.

2a. Suprastinkite reiškinį $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{NM}$.

Vektoriai $\overrightarrow{MN}$ ir $\overrightarrow{NM}$ yra priešingieji — jų suma lygi $\vec{0}$.



Akivaizdu, kad $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$. (Išėjus iš taško A grįžtama į tašką A.)

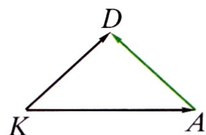
Vadinasi,

$$\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}\right) + \left(\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NM}\right) + \overrightarrow{PO} = \vec{0} + \vec{0} + \overrightarrow{PO} = \overrightarrow{PO}.$$

Atsakymas. $\overrightarrow{PO}$.

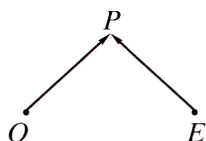
2b. Suprastinkite reiškinį $\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{EP} + \overrightarrow{KD} - \overrightarrow{KA}$.

Vektorių $\overrightarrow{KD}$ ir $\overrightarrow{KA}$ pradžios sutampa, todėl jų skirtumas:



$\overrightarrow{KD} - \overrightarrow{KA} = \overrightarrow{AD}$.
Vadinasi, $\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{EP} + \overrightarrow{KD} - \overrightarrow{KA} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{EP} + \overrightarrow{AD}$.

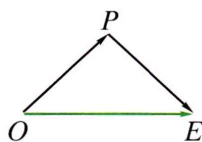
Vektorių $\overrightarrow{OP}$ ir $\overrightarrow{EP}$ pabaigos sutampa.



Vektorių $\overrightarrow{EP}$ apsukime, t. y. pakeiskime vektoriumi $-\overrightarrow{PE}$:

$$\overrightarrow{EP} \doteq -\overrightarrow{PE}.$$

Turėsime



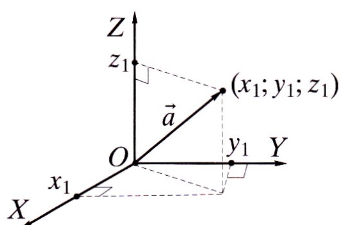
$$\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{EP} = \overrightarrow{OP} - \left(-\overrightarrow{PE}\right) = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PE} = \overrightarrow{OE}.$$

Vadinasi, duotąjį vektorinį reiškinį galima pakeisti tokiu:

$$\left(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{EP}\right) + \left(\overrightarrow{KD} - \overrightarrow{KA}\right) = \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{AD}.$$

Atsakymas. $\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{AD}$.

3. Raskite vektoriaus $\vec{p} = 3\vec{b} - 2\vec{a} + \vec{c}$ koordinates ir ilgį, kai $\vec{a}(-1; 2; 0)$, $\vec{b}(0; -5; -2)$, $\vec{c}(2; 1; -3)$.



$OXYZ$ — stačiakampė erdvės koordinačių sistema.
$\vec{a}$ — vektorius, kurio pradžia yra koordinačių sistemos pradžios taškas $O(0; 0; 0)$, o jo galo taško koordinatės yra $(x_1; y_1; z_1)$.
Vektoriaus $\vec{a}$ galo koordinatės vadinamos vektoriaus $\vec{a}$ ir bet kurio jam lygaus vektoriaus koordinatėmis. Rašoma $\vec{a}(x_1; y_1; z_1)$.

Vektorių $\vec{a}(x_1; y_1; z_1)$ ir $\vec{b}(x_2; y_2; z_2)$ suma lygi tų vektorių atitinkamų koordinačių sumai:

$$\vec{a}(x_1; y_1; z_1) + \vec{b}(x_2; y_2; z_2) = \vec{c}(x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2),$$

skirtumas lygus atitinkamų koordinačių skirtumui:

$$\vec{a}(x_1; y_1; z_1) - \vec{b}(x_2; y_2; z_2) = \vec{d}(x_1 - x_2; y_1 - y_2; z_1 - z_2),$$
$$\vec{b}(x_2; y_2; z_2) - \vec{a}(x_1; y_1; z_1) = \vec{e}(x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1).$$

Vektorių $\vec{a}(x_1; y_1; z_1)$ daugindami iš skaičiaus k gauname vektorių, kurio koordinatės yra $(kx_1; ky_1; kz_1)$, t. y.:

$$k \cdot \vec{a}(x_1; y_1; z_1) = \vec{m}(kx_1; ky_1; kz_1).$$

Vektoriaus $3\vec{b}$ koordinatės:

$$\left(3 \cdot 0; 3 \cdot (-5); 3 \cdot (-2)\right) = (0; -15; -6).$$

Vektoriaus $2\vec{a}$ koordinatės:

$$\left(2 \cdot (-1); 2 \cdot 2; 2 \cdot 0\right) = (-2; 4; 0).$$

Vektoriaus $3\vec{b} - 2\vec{a}$ koordinatės:

$$\left(0 - (-2); -15 - 4; -6 - 0\right) = (2; -19; -6).$$

Vektoriaus $3\vec{b} - 2\vec{a} + \vec{c}$ koordinatės:

$$\left(2 + 2; -19 + 1; -6 + (-3)\right) = (4; -18; -9).$$

Vadinasi, vektoriaus $\vec{p}$ koordinatės yra (4; −18; −9).

Vektoriaus $\vec{a}(x_1; y_1; z_1)$ ilgis (žymima $|\vec{a}|$) lygus kvadratinei šakniai iš vektoriaus koordinačių kvadratų sumos:

$$|\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}.$$

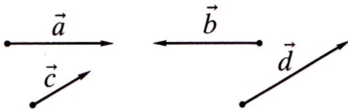
Apskaičiuojame vektoriaus $\vec{p}(4; -18; -9)$ ilgį:

$$|\vec{p}| = \sqrt{4^2 + (-18)^2 + (-9)^2} = \sqrt{16 + 324 + 81} = \sqrt{421}.$$

Atsakymas. $\vec{p}(4; -18; -9)$, $|\vec{p}| = \sqrt{421}.$

4a. Ar vektoriai $\vec{a}(3; 6; 8)$ ir $\vec{b}(6; 12; 16)$ yra kolinearūs?

Vektoriai, esantys vienoje tiesėje arba lygiagrečiose tiesėse, vadinami *kolineariaisiais*.



$\vec{a}$, $\vec{b}$ — kolinearūs ($\vec{a}$ ir $\vec{b}$ yra vienoje tiesėje),
$\vec{c}$, $\vec{d}$ — kolinearūs ($\vec{c}$ ir $\vec{d}$ yra lygiagretūs).

Jei yra toks skaičius n, su kuriuo teisinga lygybė $\vec{a} = n \cdot \vec{b}$, tai vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ yra kolinearūs. Jei tokio n nėra, tai vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ nėra kolinearūs.

Jei yra toks skaičius n, su kuriuo

$$n \cdot \vec{a} = \vec{b},$$

tai vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ — kolinearūs; jei tokia lygybė negalima, tai vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ nėra kolinearūs.

I būdas. Vektoriaus $n \cdot \vec{a}$ koordinatės:

$$(3n; 6n; 8n).$$

Vektoriai

$$n \cdot \vec{a}\ (3n; 6n; 8n) \quad \text{ir} \quad \vec{b}(6; 12; 16)$$

bus lygūs, kai jų koordinatės bus vienodos, t. y. kai bus teisingos lygybės:

$$3n = 6, \quad 6n = 12, \quad 8n = 16.$$

Akivaizdu, kad visos lygybės teisingos su $n = 2$.
Vadinasi, vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ yra kolinearūs.

II būdas. Patikriname, ar vektorių $\vec{a}(3; 6; 8)$ ir $\vec{b}(6; 12; 16)$ atitinkamų koordinačių santykiai lygūs. Iš tikrųjų,

$$\frac{6}{3} = \frac{12}{6} = \frac{16}{8}\ (= 2).$$

Atsakymas. Kolinearūs.

4b. Raskite tokius skaičius m ir n, su kuriais vektoriai $\vec{a}(4; m; n)$ ir $\vec{b}(n; 2; m^2)$ būtų kolinearūs.

Ieškome tokių m ir n reikšmių, su kuriomis teisingos lygybės:

$$\frac{4}{n} = \frac{m}{2} = \frac{n}{m^2}.$$

Iš tikrųjų, ieškome sprendinių tokios sistemos:

$$\begin{cases} \frac{4}{n} = \frac{m}{2}, \\ \frac{4}{n} = \frac{n}{m^2}, \\ \frac{m}{2} = \frac{n}{m^2}. \end{cases}$$

Iš pirmos lygties išsireiškiame vieną iš nežinomųjų (m arba n), pvz., m:

$$m = \frac{8}{n}.$$

Gautą m išraišką statome į kurią nors iš likusių sistemos lygčių, pvz., į antrąją lygtį:

$$\frac{4}{n} = \frac{n}{(\frac{8}{n})^2}, \quad \frac{4}{n} = \frac{n}{\frac{64}{n^2}}, \quad \frac{4}{n} = \frac{n^3}{64},$$

$$n^3 \cdot n = 4 \cdot 64, \quad n^4 = 256, \quad n_1 = -4, \quad n_2 = 4.$$

m reikšmes rasime iš lygybės $m = \frac{8}{n}$:
kai $n = -4$, tai $m = \frac{8}{-4} = -2$;
kai $n = 4$, tai $m = \frac{8}{4} = 2$.

Atsakymas. $n = -4$, $m = -2$; $n = 4$, $m = 2$.

5. Ar vektoriai $\vec{d}(1; -1; 2)$, $\vec{e}(-2; 0; 1)$ ir $\vec{f}(5; -1; 0)$ yra komplanarūs?

> Jeigu trys vektoriai $\vec{a}$, $\vec{b}$ ir $\vec{c}$, atidėti iš vieno taško, yra vienoje plokštumoje, tai vektoriai $\vec{a}$, $\vec{b}$ ir $\vec{c}$ vadinami ***komplanariaisiais***.
> Jei yra tokie skaičiai m ir n, su kuriais teisinga lygybė $\vec{c} = m \cdot \vec{a} + n \cdot \vec{b}$, tai vektoriai $\vec{a}$, $\vec{b}$ ir $\vec{c}$ yra komplanarūs.
> Jei tokių skaičių m ir n nėra, tai vektoriai $\vec{a}$, $\vec{b}$ ir $\vec{c}$ nėra komplanarūs.

Ieškome skaičių m ir n, su kuriais būtų teisinga lygybė:

$$\vec{d} = n \cdot \vec{e} + m \cdot \vec{f}$$

(arba lygybė $\vec{e} = n \cdot \vec{d} + m \cdot \vec{f}$, arba lygybė $\vec{f} = n \cdot \vec{d} + m \cdot \vec{e}$).
Randame vektoriaus $n \cdot \vec{e}$ koordinates:

$$n \cdot (-2; 0; 1) = (-2n; 0; n).$$

Randame vektoriaus $m \cdot \vec{f}$ koordinates:

$$m \cdot (5; -1; 0) = (5m; -m; 0).$$

Randame vektoriaus $n \cdot \vec{e} + m \cdot \vec{f}$ koordinates:

$$(-2n; 0; n) + (5m; -m; 0) = (5m - 2n; -m; n).$$

Ieškome m ir n reikšmių, su kuriomis vektoriaus

$$\vec{d}(1; -1; 2)$$

koordinatės būtų lygios atitinkamoms vektoriaus

$$(n \cdot \vec{e} + m \cdot \vec{f})(5m - 2n; -m; n)$$

koordinatėms, t. y. sprendžiame sistemą:

$$\begin{cases} 1 = 5m - 2n, \\ -1 = -m, \\ 2 = n. \end{cases}$$

Iš antros lygybės gauname $m = 1$, iš trečios matome, kad $n = 2$. Patikriname, ar su tomis m ir n reikšmėmis teisinga pirmoji sistemos lygtis:

$$1 = 5 \cdot 1 + 2 \cdot 2, \quad 1 = 1 \text{ — lygybė teisinga.}$$

Vadinasi, vektoriai $\vec{d}$, $\vec{e}$ ir $\vec{f}$ yra komplanarūs.

Atsakymas. Komplanarūs.

6a. Apskaičiuokite $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c}$, kai $\angle(\vec{a}, \vec{c}) = \angle(\vec{b}, \vec{c}) = 60°$, $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = |\vec{c}| = 2$.

Sąlygoje nurodyti vektorių $\vec{a}$, $\vec{b}$ ir $\vec{c}$ ilgiai bei kampai tarp vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{c}$ bei $\vec{b}$ ir $\vec{c}$.
Kai žinome kampą tarp vektorių ir tų vektorių ilgius, tai galime apskaičiuoti tų vektorių skaliarinę sandaugą.

> Dviejų nenulinių vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ skaliarinė sandauga (žymima $\vec{a} \cdot \vec{b}$) lygi tų vektorių ilgių $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$ ir kampo tarp jų α kosinuso sandaugai:
>
> $$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\alpha.$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}.$$

Skaičiuojame skaliarines sandaugas:

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = |\vec{a}| \cdot |\vec{c}| \cdot \cos 60° = 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 1,$$
$$\vec{b} \cdot \vec{c} = |\vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cdot \cos 60° = 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 2.$$

Vadinasi,

$$\vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c} = 1 + 2 = 3.$$

Atsakymas. $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = 3$.

6b. Ar vektoriai $\vec{c}(0; -5; 2)$ ir $\vec{d}(-6; -3; 5)$ yra statmeni?

Statmenųjų vektorių skaliarinė sandauga lygi 0.
Vektorių $\vec{a}(x_1; y_1; z_1)$ ir $\vec{b}(x_2; y_2; z_2)$ skaliarinė sandauga lygi tų vektorių atitinkamų koordinačių sandaugų sumai, t. y.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2.$$

Vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ statmeni, kai

$$x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2 = 0.$$

Jei

$$\vec{c} \cdot \vec{d} = 0,$$

tai vektoriai $\vec{c}$ ir $\vec{d}$ yra statmeni.
Skaičiuojame vektorių $\vec{c}$ ir $\vec{d}$ koordinačių sandaugų sumą:

$$\vec{c} \cdot \vec{d} = 0 \cdot (-6) + (-5) \cdot (-3) + 2 \cdot 5 = 0 + 15 + 10 = 25.$$

Kadangi

$$\vec{c} \cdot \vec{d} = 25 \neq 0,$$

tai vektoriai $\vec{c}$ ir $\vec{d}$ nėra statmeni.

Atsakymas. Ne.

6c. Duoti vektoriai $\vec{m}(-2; 4; 6)$ ir $\vec{n}(10; x; -2)$. Su kuria x reikšme $\vec{m} \cdot \vec{n} = 4$?

Vektorių $\vec{m}$ ir $\vec{n}$ skaliarinė sandauga:

$$\vec{m} \cdot \vec{n} = -2 \cdot 10 + 4 \cdot x + 6 \cdot (-2) = 4x - 32.$$

Randame x reikšmę, su kuria teisinga lygybė:

$$4x - 32 = 4,$$
$$4x = 36,$$
$$x = 9.$$

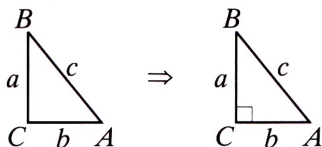
Atsakymas. 9.

7. Įrodykite, kad trikampis, kurio viršūnės yra $A(6; -4; 2)$, $B(3; 2; 3)$ ir $C(3; -5; -1)$, yra statusis.

Atstumas tarp dviejų erdvės taškų $A(x_1; y_1; z_1)$ ir $B(x_2; y_2; z_2)$ yra:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

I būdas. Galima apskaičiuoti trikampio kraštinių ilgius ir patikrinti, ar trumpesniųjų kraštinių kvadratų suma lygi ilgiausios kraštinės ilgio kvadratui (atvirkštinė Pitagoro teorema).



Jei $a^2 + b^2 = c^2$, tai $\triangle ABC$ statusis.

$$AB = \sqrt{(3-6)^2 + (2-(-4))^2 + (3-2)^2} = \sqrt{9+36+1} = \sqrt{46},$$
$$AC = \sqrt{(3-6)^2 + (-5-(-4))^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{9+1+9} = \sqrt{19},$$
$$BC = \sqrt{(3-3)^2 + (-5-2)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{0+49+16} = \sqrt{65}.$$

Lygybė

$$BC^2 = AC^2 + AB^2$$

yra teisinga:

$$65 = 19 + 46.$$

Vadinasi, $\triangle ABC$ — status.

II būdas. Galima įsitikinti, kad tarp vektorių $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$ du vektoriai yra vienas kitam statmeni.

Kai žinome vektoriaus $\overrightarrow{AB}$ pradžios $A(x_1; y_1; z_1)$ ir galo $B(x_2; y_2; z_2)$ koordinates, tai vektoriaus $\overrightarrow{AB}$ koordinates apskaičiuojame iš galo koordinačių atėmę pradžios koordinates:

$$\overrightarrow{AB}(x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1).$$

Apskaičiuojame koordinates vektorių:

$$\overrightarrow{AB}(3-6; 2-(-4); 3-2) = \overrightarrow{AB}(-3; 6; 1),$$
$$\overrightarrow{AC}(3-6; -5-(-4); -1-2) = \overrightarrow{AC}(-3; -1; -3),$$
$$\overrightarrow{BC}(3-3; -5-2; -1-3) = \overrightarrow{BC}(0; -7; -4).$$

> Vektoriai $\vec{a}(x_1; y_1; z_1)$ ir $\vec{b}(x_2; y_2; z_2)$ yra statmeni, kai
>
> $$x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2 = 0.$$

Tikriname, kam lygios vektorių skaliarinės sandaugos:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -3 \cdot 0 + 6 \cdot (-7) + 1 \cdot (-4) = -46 \neq 0,$$
$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -3 \cdot (-3) + 6 \cdot (-1) + 1 \cdot (-3) = 9 - 6 - 3 = 0.$$

Vektoriai $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{AC}$ yra statmeni, vadinasi, $\triangle ABC$ kampas A status.

8. Duoti taškai $A(2; 2; -2)$, $B(1; 4; -4)$, $C(-6; 3; 0)$, $D(0; 6; -6)$. Raskite kampo tarp vektorių $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{CD}$ kosinusą.

> $\vec{a}(x_1; y_1; z_1)$, $\vec{b}(x_2; y_2; z_2)$;
>
> $$\cos\left(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}\right) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

Apskaičiuojame vektorių $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{CD}$ koordinates:

$$\overrightarrow{AB}\big(1 - 2; 4 - 2; -4 - (-2)\big) = \overrightarrow{AB}(-1; 2; -2),$$
$$\overrightarrow{CD}\big(0 - (-6); 6 - 3; -6 - 0\big) = \overrightarrow{CD}(6; 3; -6).$$

Apskaičiuojame vektorių $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{CD}$ skaliarinę sandaugą:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = -1 \cdot 6 + 2 \cdot 3 + (-2) \cdot (-6) = -6 + 6 + 12 = 12.$$

Apskaičiuojame vektorių $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{CD}$ ilgius:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-2)^2} = \sqrt{1 + 4 + 4} = 3,$$
$$|\overrightarrow{CD}| = \sqrt{6^2 + 3^2 + (-6)^2} = \sqrt{36 + 9 + 36} = 9.$$

Taigi

$$\cos\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}}\right) = \frac{12}{3 \cdot 9} = \frac{4}{9}.$$

Atsakymas. $\frac{4}{9}$.

9. Apskaičiuokite atstumą nuo koordinačių pradžios taško O iki atkarpos MN vidurio taško, kai žinomos atkarpos galų koordinatės $M(1; 2; -1)$ ir $N(-2; 1; 1)$.

Atkarpos MN vidurio taško C koordinatės yra vektoriaus $\overrightarrow{OC}$ koordinatės.

> Atkarpos AB vidurio taško C koordinatės lygios taškų $A(x_1; y_1; z_1)$ ir $B(x_2; y_2; z_2)$ koordinačių aritmetiniam vidurkiui:
>
> $$C\left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}; \frac{z_1 + z_2}{2}\right).$$

Randame atkarpos MN vidurio taško C koordinates ($\overrightarrow{OC}$ koordinates):

$$C\left(\frac{1-2}{2}; \frac{2+1}{2}; \frac{-1+1}{2}\right) = C\left(-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; 0\right).$$

Randame $\overrightarrow{OC}\left(-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; 0\right)$ ilgį (atstumą tarp taškų $O(0; 0; 0)$ ir $C\left(-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; 0\right)$):

$$|\overrightarrow{OC}| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 0^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{5}{2}}.$$

Atsakymas. $\sqrt{2,5}$.

Briaunainiai

K14 (18.1–18.4)

1. Apskaičiuokite stačiakampio gretasienio įstrižainių ilgius, jei jo matmenys yra

   $12 \times 16 \times 21$.

2. Taisyklingosios trikampės piramidės pagrindo kraštinės ilgis yra 4 cm, o šoninė briauna su pagrindo plokštuma sudaro 45° kampą. Apskaičiuokite piramidės šoninio paviršiaus plotą.

3. Stačiojo gretasienio pagrindas — rombas, kurio bukasis kampas lygus 120°. Gretasienio aukštinės ilgis yra 5 cm, o šoninio paviršiaus plotas lygus $40\sqrt{3}\,\text{cm}^2$. Apskaičiuokite trumpesniosios gretasienio įstrižainės ilgį.

4. Taisyklingosios keturkampės nupjautinės piramidės aukštinės ilgis yra 7 cm, o pagrindų kraštinių ilgiai yra 2 cm ir 10 cm. Apskaičiuokite nupjautinės piramidės šoninės briaunos ilgį, apotemos ilgį ir tūrį.

5. Pasvirosios prizmės pagrindas — lygiagretainis, kurio įstrižainių ilgiai yra 3 dm ir 6 dm. Kampas tarp šių įstrižainių lygus 30°. Apskaičiuokite prizmės tūrį, jei jos aukštinės ilgis yra 5 dm.

6. Vamzdžio pjūvis — lygiašonis trikampis, kurio pagrindo ilgis yra 1,4 m, o aukštinės, nubrėžtos į pagrindą, ilgis — 1,2 m. Kiek kubinių metrų vandens gali pratekėti šiuo vamzdžiu per 1 h, jei vandens srovės greitis yra 2 m/s?

7. Taisyklingosios trikampės prizmės šoninė briauna lygi pagrindo aukštinei. Per šią briauną ir pagrindo aukštinę nubrėžto pjūvio plotas lygus Q. Raskite prizmės tūrį.

1. Apskaičiuokite stačiakampio gretasienio įstrižainių ilgius, jei jo matmenys yra

   $8 \times 9 \times 12.$

2. Taisyklingosios trikampės piramidės aukštinės ilgis yra 3 cm, o šoninė siena su pagrindo plokštuma sudaro 60° kampą. Apskaičiuokite piramidės šoninio paviršiaus plotą.

3. Stačiojo gretasienio pagrindas — rombas, kurio trumpesniosios įstrižainės ilgis yra 6 cm. Gretasienio trumpesniosios įstrižainės ilgis yra 10 cm, o šoninio paviršiaus plotas lygus $160\,\text{cm}^2$. Apskaičiuokite gretasienio viso paviršiaus plotą.

4. Taisyklingosios keturkampės nupjautinės piramidės aukštinės ilgis yra 12 dm, o pagrindų kraštinių ilgiai yra 2 dm ir 12 dm. Apskaičiuokite nupjautinės piramidės šoninės briaunos ilgį, apotemos ilgį ir tūrį.

5. Pasvirosios prizmės pagrindas yra lygiagretainis, kurio įstrižainių ilgiai yra 2 cm ir 5 cm. Kampas tarp šių įstrižainių lygus 30°. Apskaičiuokite prizmės tūrį, jei jos aukštinės ilgis yra 4 cm.

6. Stačiakampėje aikštelėje, kurios matmenys yra 25 dm ir 17,5 dm, reikia pastatyti $10\,\text{m}^3$ tūrio stačiakampio gretasienio formos rezervuarą. Raskite rezervuaro aukštį, jei jo pagrindo plotas sutampa su aikštelės plotu. Atsakymą pateikite centimetrų tikslumu.

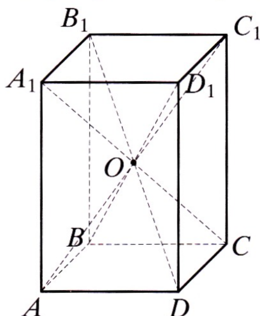
7. Taisyklingosios trikampės prizmės pagrindo kraštinė yra a, o šoninio paviršiaus plotas lygus pagrindų plotų sumai. Raskite prizmės tūrį.

Briaunainiai

K14 (18.1–18.4)

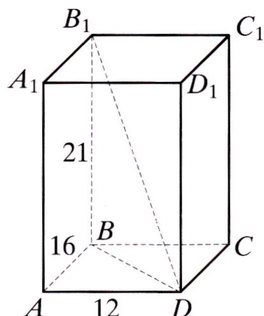
1. Apskaičiuokite stačiakampio gretasienio įstrižainių ilgius, jei jo matmenys yra $12 \times 16 \times 21$.

Stačiakampio gretasienio sienos yra stačiakampiai (priešingos sienos yra lygios). Stačiakampio gretasienio priešingas viršūnes jungiančios atkarpos vadinamos jo įstrižainėmis.



$ABCDA_1B_1C_1D_1$ — stačiakampis gretasienis;
AC_1, A_1C, BD_1, B_1D — stačiakampio gretasienio įstrižainės,
$AC_1 = A_1C = BD_1 = B_1D$,
O — įstrižainių susikirtimo taškas (įstrižainės kertasi viename taške).

Kadangi stačiakampio gretasienio įstrižainės lygios, tai pakanka apskaičiuoti vienos įstrižainės ilgį.



Duota: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — stačiakampis gretasienis,
$AB = 16$, $AD = 12$, $AA_1 = 21$.

Rasti: B_1D.

Sprendimas. Žinoma, visos sienos yra stačiakampiai, visi brėžinyje pavaizduoti trikampiai — statūs.

Iš stačiojo $\triangle ABD$:

$$BD = \sqrt{16^2 + 12^2} = \sqrt{400} = 20.$$

Iš stačiojo $\triangle B_1BD$:

$$B_1D = \sqrt{21^2 + 20^2} = \sqrt{841} = 29.$$

Pastaba. Skaičiuoti buvo galima ir remiantis stačiakampio gretasienio įstrižainę d ir matmenis $a \times b \times c$ (briaunų ilgius) siejančia formule:

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

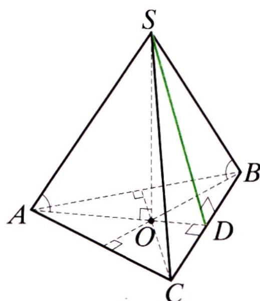
Tada

$$d^2 = 12^2 + 16^2 + 21^2 = 841, \quad d = 29.$$

Atsakymas. 29.

2. Taisyklingosios trikampės piramidės pagrindo kraštinės ilgis yra 4 cm, o šoninė briauna su pagrindo plokštuma sudaro 45° kampą. Apskaičiuokite piramidės šoninio paviršiaus plotą.

> Piramidė, kurios pagrindas yra taisyklingasis daugiakampis (lygiakraštis trikampis, kvadratas, ...), o aukštinės pagrindas yra to daugiakampio centras, vadinama ***taisyklingąja***. Taisyklingosios piramidės šoninės sienos yra lygūs lygiašoniai trikampiai.



Duota: $SABC$ — taisyklingoji piramidė, $AB = BC = CA = 4$ cm, $\angle SAO = 45°$.

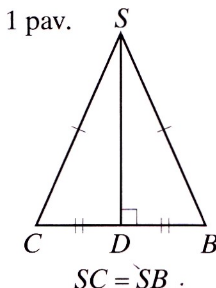
Apskaičiuoti: $S_{\text{šon}}$.

Sprendimas. Taisyklingosios piramidės šoninės sienos yra lygios:

$$S_{\text{šon}} = S_{SAC} + S_{SCB} + S_{SAB} = 3 \cdot S_{SBC}.$$

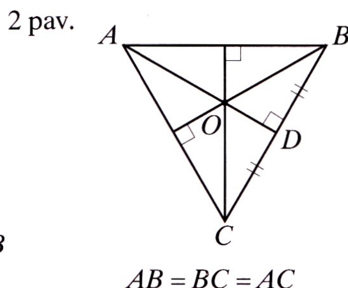
Vadinasi, reikia rasti šoninės sienos SBC aukštinę SD.

1 pav.



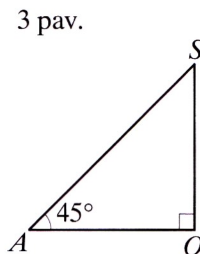
$SC = SB$.

2 pav.



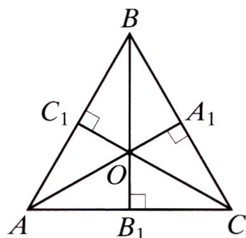
$AB = BC = AC$

3 pav.



Pirmiausia reikia pastebėti, kad trikampių SCB ir ACB aukštinių, nubrėžtų į kraštinę CB, pagrindai yra tame pačiame taške D (žr. 1 ir 2 pav.).

Aukštinę SD galima rasti iš stačiojo trikampio SOD arba iš stačiojo trikampio SDB. Bet kuriuo atveju reikės apskaičiuoti piramidės pagrindo — lygiakraščio trikampio ABC — aukštinę.



$AB = BC = AC, \quad \angle A = \angle B = \angle C = 60°$;
$BB_1 \perp AC, \quad AA_1 \perp BC, \quad CC_1 \perp AB$;
$AB_1 = B_1C = CA_1 = A_1B = BC_1 = C_1A$;
$\angle ACC_1 = \angle C_1CB = \angle CBB_1 = \angle B_1BA = \angle BAA_1 =$
$= \angle A_1AC = \frac{60°}{2} = 30°$;
$BB_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}AC, \quad BO = \frac{2}{3}BB_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}AC,$
$OB_1 = \frac{1}{3}BB_1 = \frac{\sqrt{3}}{6}AC.$

Apskaičiuojame AD ilgį (iš stačiojo $\triangle ACD$):

$$AD^2 = AC^2 - CD^2, \quad CD = \frac{AC}{2} = \frac{4}{2} = 2\,(\text{cm}),$$
$$AD = \sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}\,(\text{cm}).$$

Apskaičiuojame AO ir OD ilgius:

$$AO = \frac{2}{3} \cdot AD = \frac{4\sqrt{3}}{3},$$
$$OD = \frac{1}{3} \cdot AD = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Apskaičiuojame piramidės šoninės briaunos ilgį (iš stačiojo $\triangle SOA$):

$$SA^2 = AO^2 + OS^2 \quad (AO = OS, \text{ nes } \angle S = 45^\circ \text{ — } \triangle SOA \text{ yra lygiašonis}),$$
$$SA = \sqrt{\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{16 \cdot 3}{9} \cdot 2} = \sqrt{\frac{32}{3}} = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\,(\text{cm}).$$

Apskaičiuojame šoninės sienos aukštinės SD ilgį (iš stačiojo trikampio SDB):

$$SD^2 = SB^2 - BD^2 \quad (SB = SA),$$
$$SD = \sqrt{\left(\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2 - 2^2} = \sqrt{\frac{16 \cdot 2}{3} - 4} = \sqrt{\frac{20}{3}} = 2\sqrt{\frac{5}{3}}\,(\text{cm}).$$

Apskaičiuojame šoninės sienos plotą:

$$S_{SBC} = \frac{SD \cdot CB}{2} = \frac{2\sqrt{\frac{5}{3}} \cdot 4}{2} = 4\sqrt{\frac{5}{3}}\,(\text{cm}^2).$$

Vadinasi,

$$S_{\text{šon}} = 3 \cdot S_{SBC} = 3 \cdot 4\sqrt{\frac{5}{3}} = 12\sqrt{\frac{5}{3}}\,(\text{cm}^2).$$

Galima atsakymą pertvarkyti — parašyti be iracionalių skaičių vardiklyje:

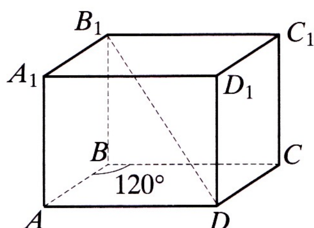
$$\frac{12\sqrt{5}}{\sqrt{3}} = \frac{12 \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{12\sqrt{5 \cdot 3}}{3} = 4\sqrt{15}.$$

Pastaba. Skaičiuojant šoninės sienos aukštinės SD ilgį iš stačiojo $\triangle SOD$, nereikėtų skaičiuoti piramidės briaunos ilgio. Apskaičiavę AO ir OD ilgius bei pastebėję, kad $\triangle SOA$ — lygiašonis ($AO = OS$), iškart galėtume skaičiuoti SD ilgį.

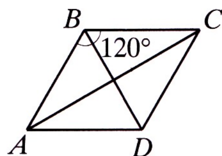
Atsakymas. $4\sqrt{15}\,\text{cm}^2$.

3. Stačiojo gretasienio pagrindas — rombas, kurio bukasis kampas lygus 120°. Gretasienio aukštinės ilgis yra 5 cm, o šoninio paviršiaus plotas lygus $40\sqrt{3}\,\text{cm}^2$. Apskaičiuokite trumpesniosios gretasienio įstrižainės ilgį.

> Stačiojo gretasienio šoninės sienos yra stačiakampiai (pagrindai — lygūs lygiagretainiai), o aukštinė lygi šoninei briaunai.



Duota: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — statusis gretasienis,
$ABCD$ — rombas, $\angle ABC = 120°$,
$AA_1 = 5\,\text{cm}$,
$S_{\check{s}on} = 40\sqrt{3}\,\text{cm}^2$.
Rasti: B_1D.



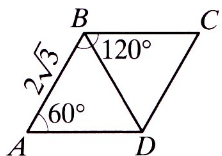
Sprendimas. Gretasienio pagrindo $ABCD$ trumpesnioji įstrižainė yra BD, todėl ieškomoji (trumpesnioji) gretasienio įstrižainė yra B_1D $(= D_1B)$.
Radę BD ilgį, iš stačiojo trikampio B_1BD, apskaičiuotume įstrižainės B_1D ilgį.

Kadangi $ABCD$ rombas, tai

$$AB = BC = CD = DA.$$

Raskime AB ilgį.

$$S_{\check{s}on} = 40\sqrt{3}\,\text{cm}^2 \text{ (duota)},$$
$$S_{\check{s}on} = 4 \cdot S_{ABB_1A_1} = 4 \cdot 5 \cdot AB = 20 \cdot AB,$$
$$20 \cdot AB = 40\sqrt{3}, \quad AB = 2\sqrt{3}\,\text{cm}.$$



$\angle A = 180° - \angle B = 180° - 120° = 60°$.
$\triangle ABD$ — lygiakraštis, nes $\angle A = \angle B = \angle D = 60°$ (tai seka iš to, kad rombo įstrižainės jo kampus dalija pusiau: $\angle ABD = \frac{120°}{2} = 60°$).
Vadinasi,

$$BD = AB = 2\sqrt{3}\,\text{cm}.$$

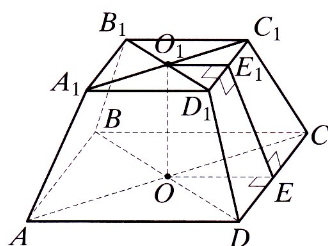
Iš stačiojo $\triangle B_1BD$ apskaičiuojame B_1D:

$$B_1D^2 = B_1B^2 + BD^2,$$
$$B_1D = \sqrt{5^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{25 + 12} = \sqrt{37}\,\text{(cm)}.$$

Atsakymas. $\sqrt{37}$ cm.

4. Taisyklingosios keturkampės nupjautinės piramidės aukštinės ilgis yra 7 cm, o pagrindų kraštinių ilgiai yra 2 cm ir 10 cm. Apskaičiuokite nupjautinės piramidės šoninės briaunos ilgį, apotemos ilgį ir tūrį.

> Nupjautinės taisyklingosios keturkampės piramidės pagrindai yra kvadratai, šoninės sienos — lygiašonės trapecijos, aukštinė — atkarpa, jungianti pagrindų centrus, apotema — šoninės sienos (trapecijos) aukštinė.
> Nupjautinės piramidės tūrį V galima apskaičiuoti remiantis formule:
>
> $$V = \frac{1}{3}H\left(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 \cdot S_2}\right);$$
>
> čia H — nupjautinės piramidės aukštinė, S_1 ir S_2 — pagrindų plotai.



Duota: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — taisyklingoji keturkampė nupjautinė piramidė, $AB = 10$ cm, $A_1B_1 = 2$ cm, $OO_1 = 7$ cm.
Apskaičiuoti: AA_1, EE_1, V.

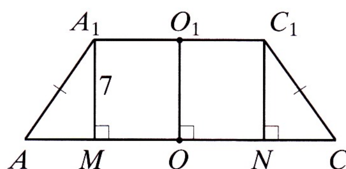
1) Apskaičiuokime šoninės briaunos AA_1 ilgį. Nagrinėkime keturkampį AA_1C_1C (lygiašonė trapecija).
Apskaičiuokime A_1C_1 ilgį. A_1C_1 yra viršutinio pagrindo $A_1B_1C_1D_1$ įstrižainė:

$$A_1C_1 = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}\,(\text{cm}).$$

Apskaičiuokime AC ilgį. AC yra apatinio pagrindo $ABCD$ įstrižainė:

$$AC = \sqrt{10^2 + 10^2} = \sqrt{200}\,(\text{cm}).$$

Atskirai pavaizduokime AA_1C_1C:



Apskaičiuokime AM ilgį:

$$AM = \frac{AC - A_1C_1}{2} = \frac{\sqrt{200} - \sqrt{8}}{2} = \frac{2\sqrt{50} - 2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{50} - \sqrt{2}\,(\text{cm}).$$

Gautą reiškinį pravartu suprastinti:

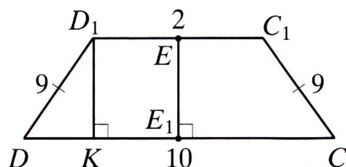
$$AM = \sqrt{50} - \sqrt{2} = \sqrt{25 \cdot 2} - \sqrt{2} = 5\sqrt{2} - \sqrt{2} = 4\sqrt{2}.$$

Iš stačiojo $\triangle AMA_1$ apskaičiuojame AA_1:

$$AA_1 = \sqrt{7^2 + (4\sqrt{2})^2} = \sqrt{49 + 16 \cdot 2} = \sqrt{81} = 9\,(\text{cm}).$$

2) Apskaičiuokime apotemos EE_1 ilgį.

I būdas. Nagrinėkime šoninę sieną DD_1C_1C (lygiašonė trapecija).

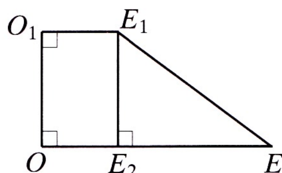


$EE_1 = D_1K$, $\triangle D_1KD$ status:

$DK = \frac{DC - D_1C_1}{2} = \frac{10-2}{2} = 4\,(\text{cm})$,

$D_1K = \sqrt{9^2 - 4^2} = \sqrt{81 - 16} = \sqrt{65}\,(\text{cm})$.

II būdas. Nagrinėkime stačiąją trapeciją OO_1E_1E.



$O_1E_1 = \frac{1}{2}A_1D_1 = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1\,(\text{cm})$,

$OE = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2} \cdot 10 = 5\,(\text{cm})$.

Keturkampis $OO_1E_1E_2$ yra stačiakampis, tai

$E_1E_2 = OO_1 = 7\,\text{cm}$,

$E_2E = OE - OE_2 = OE - O_1E_1 = 5 - 1 = 4\,(\text{cm})$.

Iš stačiojo $\triangle E_2EE_1$ apskaičiuojame EE_1:

$$EE_1 = \sqrt{E_2E^2 + E_1E_2^2} = \sqrt{4^2 + 7^2} = \sqrt{16 + 49} = \sqrt{65}\,(\text{cm}).$$

3) Apskaičiuokime nupjautinės piramidės tūrį. Remsimės formule:

$$V = \frac{1}{3}H \cdot \left(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 \cdot S_2}\right),$$

$$H = OO_1 = 7\,\text{cm (duota)}.$$

Apskaičiuojame pagrindų plotus:

$$S_1 = S_{ABCD} = 10^2 = 100\,(\text{cm}^2),$$

$$S_2 = S_{A_1B_1C_1D_1} = 2^2 = 4\,(\text{cm}^2).$$

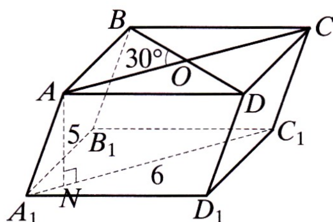
Tada

$$V = \frac{1}{3} \cdot 7 \cdot \left(100 + 4 + \sqrt{100 \cdot 4}\right) = \frac{1}{3} \cdot 7 \cdot 124 = 289\frac{1}{3}\,(\text{cm}^3).$$

Atsakymas. $EE_1 = \sqrt{65}\,\text{cm}$; $CC_1 = 9\,\text{cm}$; $V = 289\frac{1}{3}\,(\text{cm}^3)$.

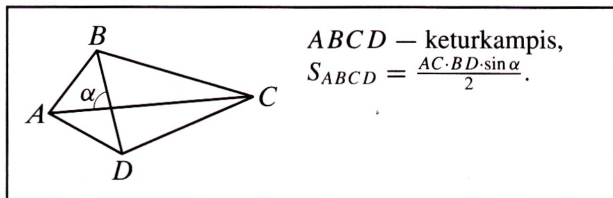
5. Pasvirosios prizmės pagrindas — lygiagretainis, kurio įstrižainių ilgiai yra 3 dm ir 6 dm. Kampas tarp šių įstrižainių lygus 30°. Apskaičiuokite prizmės tūrį, jei jos aukštinės ilgis yra 5 dm.

> Pasvirosios prizmės pagrindai — lygūs daugiakampiai, šoninės sienos — lygiagretainiai. Prizmės tūris lygus pagrindo ploto ir aukštinės sandaugai:
>
> $V = S_{\text{pagr.}} \cdot H.$



Duota: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — prizmė,
$ABCD$ — lygiaretainis,
$AC = 6$ dm, $BD = 3$ dm,
$\angle AOB = 30^\circ$, $AN = 5$ dm.
Apskaičiuoti: V.

Sprendimas. Apskaičiuokime pagrindo (lygiagretainio $ABCD$) plotą.



$ABCD$ — keturkampis,
$S_{ABCD} = \frac{AC \cdot BD \cdot \sin\alpha}{2}$.

Keturkampio plotas lygus įstrižainių ilgių ir sinuso kampo tarp įstrižainių sandaugos pusei. Taigi

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3 \cdot \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} = 4{,}5\ (\text{dm}^2).$$

Apskaičiuojame prizmės tūrį:

$$V = S_{ABCD} \cdot H = 4{,}5 \cdot 5 = 22{,}5\ (\text{dm}^3).$$

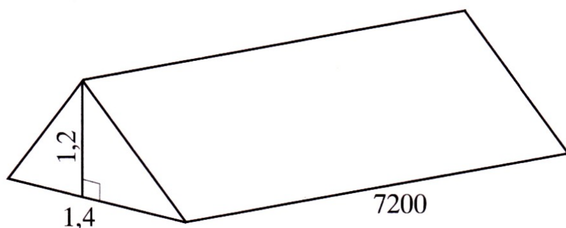
Atsakymas. 22,5 dm^3.

6. Vamzdžio pjūvis — lygiašonis trikampis, kurio pagrindo ilgis yra 1,4 m, o aukštinės, nubrėžtos į pagrindą, ilgis — 1,2 m. Kiek kubinių metrų vandens gali pratekėti šiuo vamzdžiu per 1 h, jei vandens srovės greitis yra 2 m/s?

Sąlygą galima suprasti taip: kokio ilgio vamzdis prisipildys per 1 h?
Iš sąlygos aišku, kad per 1 sekundę prisipildo 2 m vamzdžio. Vadinasi, per

$$1\ \text{h} = 60\ \text{min} = 60 \cdot 60 = 3600\ \text{sekundžių}$$

prisipildys $2\ \text{m} \cdot 3600 = 7200$ metrų ilgio vamzdis.
Lieka apskaičiuoti, kiek kubinių metrų telpa tokiame vamzdyje. Vamzdis — stačioji trikampė prizmė.



Stačiosios prizmės tūris $V = S_{\text{pagr}} \cdot H$.

Apskaičiuojame S_{pagr} — lygiašonio trikampio plotą:

$$S_{\text{pagr}} = \frac{1{,}4 \cdot 1{,}2}{2} = 0{,}84\ (\text{m}^2).$$

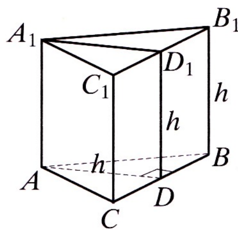
Prizmės tūris:

$$V = 0{,}84 \cdot 7200 = 6048\ (\text{m}^3).$$

Atsakymas. $6048\ \text{m}^3$.

7. Taisyklingosios trikampės prizmės šoninė briauna lygi pagrindo aukštinei. Per šią briauną ir pagrindo aukštinę nubrėžto pjūvio plotas lygus Q. Raskite prizmės tūrį.

Prizmės pagrindas — lygiakraštis trikampis (nes prizmė taisyklingoji).

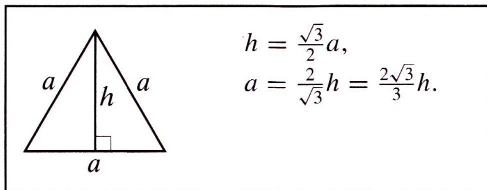


Duota: $ABCA_1B_1C_1$ — taisyklingoji prizmė,
$AD \perp CB$,
$S_{AA_1D_1D} = Q$.
Rasti: V.

Sprendimas. Prizmės tūris $V = S_{ABC} \cdot BB_1$. Prizmės pagrindo aukštinę pažymėkime h. Pjūvio AA_1D_1D plotas

$$S = AD \cdot DD_1 = h \cdot h = h^2 = Q.$$

Vadinasi, $h = \sqrt{Q}$.
Apskaičiuokime pagrindo — lygiakraščio trikampio ABC plotą.



$$h = \tfrac{\sqrt{3}}{2}a,$$
$$a = \tfrac{2}{\sqrt{3}}h = \tfrac{2\sqrt{3}}{3}h.$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{Q} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3}\sqrt{Q} = \frac{\sqrt{3}}{3}Q.$$

Tūris

$$V = \frac{\sqrt{3}}{3}Q \cdot \sqrt{Q} = \frac{\sqrt{3}}{3}Q\sqrt{Q}.$$

Atsakymas. $\frac{\sqrt{3}}{3}Q\sqrt{Q}$.

Sukiniai

K15 (19.1–19.3)

1. Ritinio ašiai lygiagreti plokštuma atkerta pagrindo apskritime 120° lanką. Ritinio ašis nuo kertančios plokštumos nutolusi 2 cm atstumu. Apskaičiuokite pjūvio plotą, jei ritinio ašies ilgis yra 10 cm.

2. Ritinio pagrindo spindulio ilgis yra 2 cm, o aukštinės ilgis yra 7 cm. Apskaičiuokite skritulio, lygiapločio su visu ritinio paviršiumi, spindulio ilgį.

3. Kūgio šoninio paviršiaus plotas lygus $10\,\text{cm}^2$. Kūgio išklotinės skritulio išpjova sudaro 36° kampą. Apskaičiuokite kūgio pagrindo spindulio ilgį ir viso paviršiaus plotą.

4. Nupjautinio kūgio sudaromoji į pagrindo plokštumą pasvirusi 45° kampu. Apskaičiuokite kūgio viso paviršiaus plotą, jei pagrindų spinduliai yra R ir r.

5. Rutulio sluoksnio pagrindų spinduliai yra 3 ir 4. Apskaičiuokite sluoksnio tūrį, jei rutulio spindulio ilgis yra 5 (du atvejai).

6. Nupjautinio kūgio tūris lygus $52\,\text{cm}^3$, o jo vieno pagrindo plotas 9 kartus didesnis už kito pagrindo plotą. Nupjautinio kūgio sudaromosios pratęsiamos, kol gaunamas kūgis. Apskaičiuokite gauto kūgio tūrį.

7. Kūgio formos indo aukštis lygus 0,18 m, o jo pagrindo skersmens ilgis yra 0,24 m. Vytenis pasėmė šį indą pilną vandens, o tada jį perpylė į ritinio formos indą, kurio pagrindo skersmens ilgis yra 0,1 m. Koks bus vandens aukštis šiame inde? Atsakymą užrašykite metrais šimtųjų tikslumu.

8. Trikampis, kurio kraštinių ilgiai yra 21 cm, 10 cm ir 17 cm, sukamas apie ilgiausiąją kraštinę. Apskaičiuokite gautojo kūno tūrį ir viso paviršiaus plotą.

1. Ritinio aukštinės ilgis yra 6 cm, o pagrindo spindulio ilgis yra 5 cm. Apskaičiuokite ritinio ašiai lygiagretaus pjūvio plotą, jei ritinio ašis nuo kertančios plokštumos nutolusi 4 cm atstumu.

2. Ritinio aukštinė 10 cm ilgesnė už pagrindo spindulį. Apskaičiuokite ritinio pagrindo spindulio ir aukštinės ilgius, jei ritinio viso paviršiaus plotas lygus 144π cm^2.

3. Išpjovos spindulio ilgis yra 3 cm, o jos kampas lygus 120°. Išpjova sulenkta taip, kad sudaro kūgio šoninį paviršių. Apskaičiuokite šio kūgio pagrindo spindulio ilgį ir tūrį.

4. Nupjautinio kūgio sudaromoji į pagrindo plokštumą pasvirusi 60° kampu. Vieno pagrindo spindulys dvigubai didesnis už kito pagrindo spindulį. Apskaičiuokite kūgio viso paviršiaus plotą, jei jo sudaromoji lygi $2a$.

5. Rutulys, kurio spindulio ilgis yra 65 cm, perkirstas dviem lygiagrečiomis plokštumomis. Apskaičiuokite gauto sluoksnio tūrį, jei kertančių skritulių spindulių ilgiai yra 63 cm ir 60 cm (du atvejai).

6. Kūgio sudaromosios ilgis yra 13 cm, o aukštinės ilgis yra 12 cm. Kūgį kertanti plokštuma, lygiagreti pagrindo plokštumai ir nuo jos nutolusi 6 cm atstumu, dalija kūgį į dvi dalis. Apskaičiuokite šių dalių tūrius.

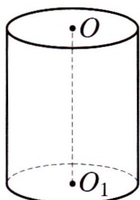
7. Į ritinio formos indą, kurio pagrindo skersmens ilgis yra 20 cm, įpilta 15 cm vandens. Į vandenį įmestas rutulys, kurio spindulio ilgis yra 6 cm. Iki kokio aukščio pakilo vanduo? Atsakymą užrašykite vienetų tikslumu.

8. Trikampis, kurio kraštinių ilgiai yra 6 cm, 25 cm ir 29 cm, sukamas apie trumpiausiąją kraštinę. Apskaičiuokite gautojo kūno tūrį ir viso paviršiaus plotą.

Sukiniai

K15 (19.1–19.3)

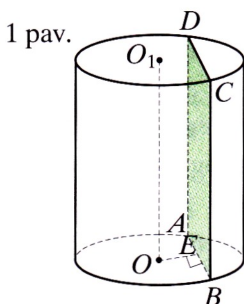
1. Ritinio ašiai lygiagreti plokštuma atkerta pagrindo apskritime 120° lanką. Ritinio ašis nuo kertančios plokštumos nutolusi 2 cm atstumu. Apskaičiuokite pjūvio plotą, jei ritinio ašies ilgis yra 10 cm.



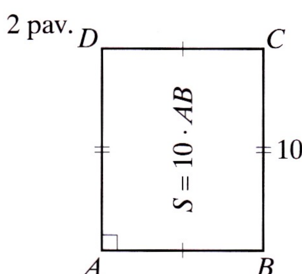
Stačiakampį sukdami apie vieną jo kraštinę, gauname ritinį. Ritinio pagrindai — skrituliai. Pagrindų centrus jungianti atkarpa yra ritinio aukštinė (ji taip pat laikoma ritinio ašimi).
OO_1 — aukštinė (ašis).

Nusibraižykime brėžinį:

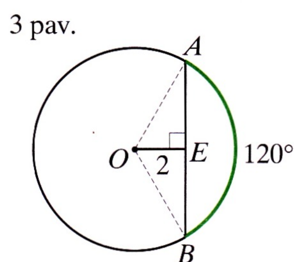
1 pav.



2 pav.



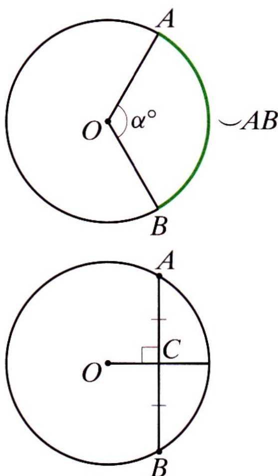
3 pav.



Duota: $\smile AB = \angle AOB = 120°$, $OE = 2\,\text{cm}$, $OO_1 = 10\,\text{cm}$.
Rasti: S_{ABCD}.
Sprendimas. Iš sąlygos aišku, kad reikia rasti stačiakampio $ABCD$ plotą (2 pav.). Stačiakampio kraštinė AD lygi ritinio aukštinei (ašiai):

$$AD = OO_1 = 10\,\text{cm}.$$

Reikia rasti kitos stačiakampio kraštinės AB ilgį (2 pav.). AB ilgį rasime remdamiesi 3 pav.



Apskritimo lanko ilgį galima matuoti tą lanką atitinkančio centrinio kampo dydžiu.
Visą apskritimą atitinka 360°.
$\smile AB = \alpha°$.

Apskritimo stygai statmenas spindulys (skersmuo) tą stygą dalija pusiau.
AB — styga, OC — spindulys,
$OC \perp AB \Rightarrow AC = CB$ $(\triangle OCB = \triangle OCA)$.

Kadangi $OE \perp AB$, tai $AE = EB$, $\triangle OEA = \triangle OEB$.
Kadangi $\smile AB = 120^\circ$, tai $\angle AOB = 120^\circ$.
Iš $\triangle OEA$:

$$OE = 2\,\text{cm (duota)},$$
$$\angle AOE = \frac{\angle AOB}{2} = \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ,$$
$$\angle OAE = 180^\circ - 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ,$$
$$OA = 2 \cdot OE = 2 \cdot 2 = 4\,(\text{cm})\ (\text{statinis prieš } 30^\circ \text{ kampą lygus pusei įžambinės}),$$
$$AE = \sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{12}\,(\text{cm}),$$
$$AB = 2 \cdot AE = 2\sqrt{12}\,(\text{cm}).$$

Apskaičiuojame stačiakampio $ABCD$ plotą:

$$S = 10 \cdot AB = 10 \cdot 2\sqrt{12} = 20\sqrt{12} = 40\sqrt{3}\,(\text{cm}^2).$$

Atsakymas. $40\sqrt{3}\,\text{cm}^2$.

2. Ritinio pagrindo spindulio ilgis yra 2 cm, o aukštinės ilgis yra 7 cm. Apskaičiuokite skritulio, lygiapločio su visu ritinio paviršiumi, spindulio ilgį.

r
h
Ritinio išklotinė
$S_{pagr} = \pi r^2$
h $S_{šon} = 2\pi rh$
$2\pi r$
$S_{pagr} = \pi r^2$

Ritinio viso paviršiaus plotas

$$S = S_{šon} + 2 \cdot S_{pagr} = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r(h + r).$$

Raskime ritinio viso paviršiaus plotą:

$$S = S_{šon} + 2 \cdot S_{pagr} = 2\pi \cdot 2 \cdot 7 + 2 \cdot \pi \cdot 2^2 = 28\pi + 8\pi = 36\pi\ (\text{cm}^2).$$

Ieškomo skritulio spindulio ilgį pažymėkime x. To skritulio plotas $\pi \cdot x^2$ lygus ritinio paviršiaus plotui:

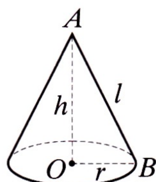
$$\pi x^2 = 36\pi, \quad x^2 = 36, \quad x = 6\,(\text{cm}).$$

Vadinasi, skritulio spindulio ilgis lygus 6 cm.

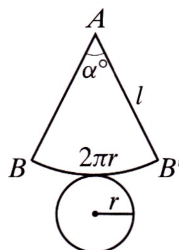
Atsakymas. 6 cm.

3. Kūgio šoninio paviršiaus plotas lygus $10\,\text{cm}^2$. Kūgio išklotinės skritulio išpjova sudaro 36° kampą. Apskaičiuokite kūgio pagrindo spindulio ilgį ir viso paviršiaus plotą.

Statųjį trikampį sukdami apie jo statinį gauname kūgį.



$AO = h$ – aukštinė,
$OB = r$ – pagrindo spindulys,
$AB = l$ – sudaromoji,
$l = \sqrt{h^2 + r^2}$,
$S_{\text{šon}} = \pi r l$.

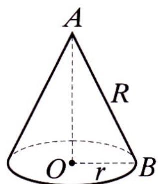


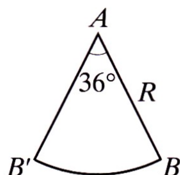
$S_{\text{šon}} = \frac{\pi l^2}{360} \cdot \alpha$

$S_{\text{pagr}} = \pi r^2$

Kūgio viso paviršiaus plotas $S = S_{\text{šon}} + S_{\text{pagr}} = \frac{\pi l^2}{360^\circ} \cdot \alpha + \pi r^2$.

Nusibraižykime brėžinį.





Šoninio paviršiaus išklotinė

Duota: $S_{\text{šon}} = 10\,\text{cm}^2$, $\angle BAB' = 36^\circ$
Rasti: r, S_{pav}.

Kūgio sudaromąją pažymėkime R. Šoninio paviršiaus plotas

$$S_{\text{šon}} = \frac{\pi R^2}{360} \cdot 36 = \frac{\pi R^2}{10}, \quad \frac{\pi R^2}{10} = 10, \quad \pi R^2 = 100,$$
$$R^2 = \frac{100}{\pi}, \quad R = \frac{10}{\sqrt{\pi}}\ \text{(cm)}.$$

Apskaičiuokime $\smile BB'$ ilgį. Apskritimo, kurio spindulys $R = \frac{10}{\sqrt{\pi}}$ cm, ilgis lygus

$$C = 2\pi R = 2\pi \cdot \frac{10}{\sqrt{\pi}} = 20\sqrt{\pi}\ \text{(cm)}.$$

To apskritimo išpjovos, atitinkančios 36° centrinį kampą, lanko ilgis bus 10 kartų mažesnis ($\frac{360}{36} = 10$) už apskritimo ilgį. Vadinasi,

$$\smile BB' = \frac{20\sqrt{\pi}}{10} = 2\sqrt{\pi}.$$

Išpjovos lanko BB' ilgis lygus kūgio pagrindo apskritimo ilgiui. Kūgio pagrindo spindulį pažymėkime r. Kūgio pagrindo (apskritimo) ilgis lygus $2\pi r$. Vadinasi, teisinga lygybė

$$2\pi r = 2\sqrt{\pi}.$$

Iš čia randame r:

$$r = \frac{2\sqrt{\pi}}{2\pi} = \frac{\sqrt{\pi}}{\pi}.$$

Apskaičiuojame kūgio viso paviršiaus plotą:

$$S = S_{\text{šon}} + S_{\text{pagr}} = 10 + \pi r^2 = 10 + \pi \cdot \left(\frac{\sqrt{\pi}}{\pi}\right)^2 = 10 + \pi \cdot \frac{\pi}{\pi^2} =$$
$$= 10 + 1 = 11\ (\text{cm}^2).$$

Atsakymas. $\frac{\sqrt{\pi}}{\pi}$ cm, 11 cm^2.

4. Nupjautinio kūgio sudaromoji į pagrindo plokštumą pasvirusi 45° kampu. Apskaičiuokite kūgio viso paviršiaus plotą, jei pagrindų spinduliai yra R ir r.

Nupjautinį kūgį gauname sukdami stačiąją trapeciją apie šoninę kraštinę, kuri statmena pagrindams.

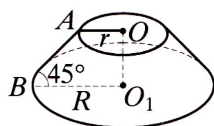
Nupjautinis kūgis

r, R – pagrindų spinduliai,
H – aukštinė,
l – sudaromoji.

Išklotinė

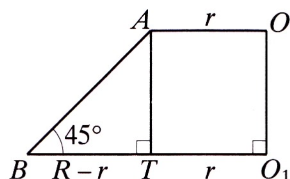
$S_{\text{šon}} = \pi \cdot (R + r) \cdot l$
$S_{\text{pav}} = \pi \cdot (R + r) \cdot l + \pi r^2 + \pi R^2 =$
$= \pi \cdot ((R + r) \cdot l + r^2 + R^2)$

Ašinis pjūvis – lygiašonė trapecija



Duota: $AO = r$, $BO_1 = R$, $\angle ABO_1 = 45°$.
Rasti: S_{pav}.

Nupjautinio kūgio viso paviršiaus plotas lygus pagrindų plotų (πR^2 ir πr^2) ir šoninio paviršiaus ploto ($\pi \cdot (R + r) \cdot AB$) sumai. Vadinasi, reikia rasti sudaromosios AB ilgį.



Trikampis ATB — status ($\angle T = 90°$),
$BT = R - r$,
$\angle A = 180° - 90° - 45° = 45°$ — $\triangle ATB$ lygiašonis.
Vadinasi, $AT = BT = R - r$.

Remdamiesi Pitagoro teorema, randame AB:

$$AB = \sqrt{(R-r)^2 + (R-r)^2} = \sqrt{2 \cdot (R-r)^2} = \sqrt{2} \cdot (R-r).$$

Taigi nupjautinio kūgio viso paviršiaus plotas

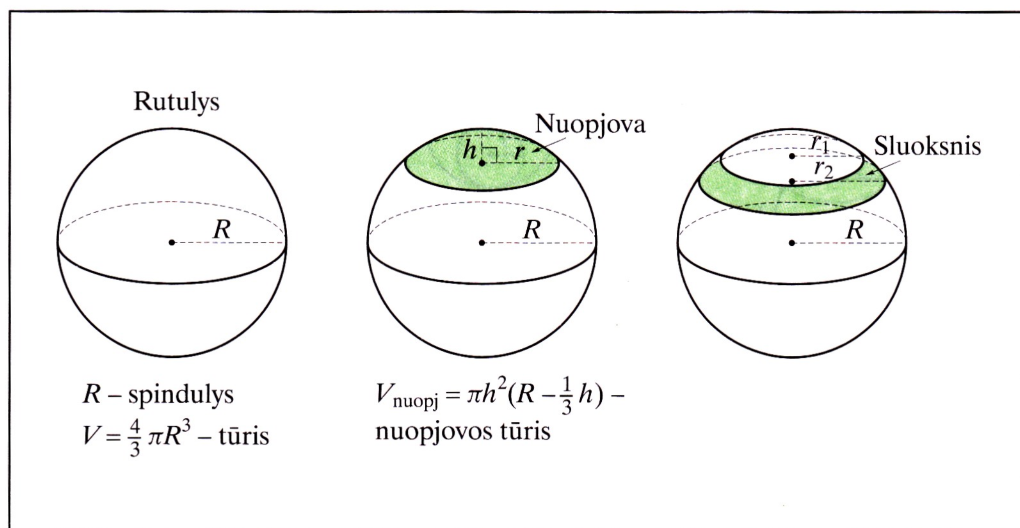
$$S_{\text{pav}} = \pi r^2 + \pi R^2 + \pi(R+r) \cdot \sqrt{2}(R-r).$$

Šį reiškinį dar galima patvarkyti, nors tai nebūtina:

$$S_{\text{pav}} = \pi\left(R^2 + r^2 + \sqrt{2}(R^2 - r^2)\right).$$

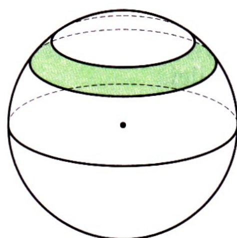
Atsakymas. $\pi\left(R^2 + r^2 + \sqrt{2}(R^2 - r^2)\right)$.

5. Rutulio sluoksnio pagrindų spinduliai yra 3 ir 4. Apskaičiuokite sluoksnio tūrį, jei rutulio spindulio ilgis yra 5 (du atvejai).

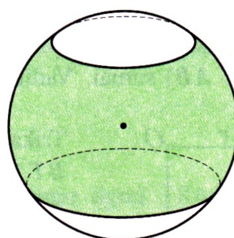


Galimi du atvejai:

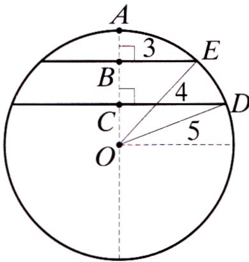
1) Sluoksnio pagrindai yra vienoje rutulio centro pusėje:



2) Sluoksnio pagrindai yra skirtingose rutulio centro pusėse:



Nagrinėkime 1) atvejį. Nusibraižykime rutulio pjūvį, einantį per rutulio centrą.



Galima samprotauti taip. Sluoksnio tūris lygus nuopjovos, kurios spindulio ilgis yra 4, tūriui minus tūris nuopjovos, kurios spindulio ilgis yra 3.
Didesniosios nuopjovos tūris:
$V_{\mathrm{d}} = \pi \cdot AC^2 \cdot \left(5 - \frac{1}{3} \cdot AC\right)$.
Mažesniosios nuopjovos tūris:
$V_{\mathrm{m}} = \pi \cdot AB^2 \cdot \left(5 - \frac{1}{3} \cdot AB\right)$.

Vadinasi, reikia apskaičiuoti tų nuopjovų aukščius AB ir AC.
Iš stačiojo $\triangle OCD$ ($\angle C = 90^\circ$, $OD = 5$) apskaičiuojame OC ilgį:

$$OC = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3.$$

Iš stačiojo $\triangle OBE$ ($\angle B = 90^\circ$, $OE = 5$) apskaičiuojame OB ilgį:

$$OB = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4.$$

Vadinasi,

$$AB = OA - OB = 5 - 4 = 1,$$
$$AC = OA - OC = 5 - 3 = 2.$$

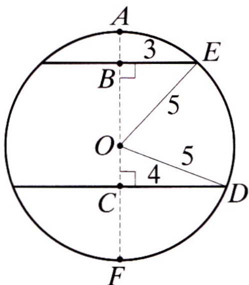
Nuopjovų tūriai:

$$V_{\mathrm{m}} = \pi \cdot AB^2 \cdot \left(5 - \frac{1}{3} \cdot AB\right) = \pi \cdot 1^2\left(5 - \frac{1}{3} \cdot 1\right) = 4\frac{2}{3}\pi,$$
$$V_{\mathrm{d}} = \pi \cdot AC^2 \cdot \left(5 - \frac{1}{3} \cdot AC\right) = \pi \cdot 2^2\left(5 - \frac{1}{3} \cdot 2\right) = 17\frac{1}{3}\pi.$$

Sluoksnio tūris:

$$V = V_{\mathrm{d}} - V_{\mathrm{m}} = 17\frac{1}{3}\pi - 4\frac{2}{3}\pi = 12\frac{2}{3}\pi.$$

Nagrinėkime 2) atvejį. Braižome centrinį pjūvį.



Sluoksnio tūrį gausime iš rutulio tūrio atėmę viršutinės nuopjovos (1 atveju jį vadinome mažesniąja nuopjova) ir apatinės nuopjovos tūrius.
Rutulio tūris:
$V_{\mathrm{r}} = \frac{4}{3}\pi \cdot 5^3 = \frac{500}{3} \cdot \pi$.

Viršutinės nuopjovos tūrį jau apskaičiavome:

$$V_{\mathrm{m}} = \frac{14}{3}\pi.$$

Apatinės nuopjovos tūrį taip pat jau apskaičiavome:

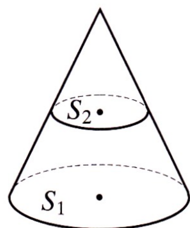
$$V_{\mathrm{d}} = \frac{52}{3}\pi.$$

Vadinasi, sluoksnio tūris:

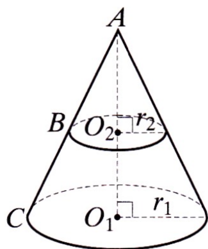
$$V = V_{\mathrm{r}} - V_{\mathrm{m}} - V_{\mathrm{d}} = \frac{500}{3}\pi - \frac{14}{3}\pi - \frac{52}{3}\pi = \frac{434}{3}\pi = 144\frac{2}{3}\pi.$$

Atsakymas. $12\frac{2}{3}\pi$, $144\frac{2}{3}\pi$.

6. Nupjautinio kūgio tūris lygus $52\,\mathrm{cm}^3$, o jo vieno pagrindo plotas 9 kartus didesnis už kito pagrindo plotą. Nupjautinio kūgio sudaromosios pratęsiamos, kol gaunamas kūgis. Apskaičiuokite kūgio tūrį.



Duota: $V_{\text{nupj.k.}} = 52\,\mathrm{cm}^3$, $S_1 = 9 \cdot S_2$.
Apskaičiuoti: $V_{\text{didž.k.}}$
Išspręsti šį uždavinį galima remiantis panašiųjų figūrų (kūnų) panašumo koeficiento savybėmis.



Viršutinis (mažasis) kūgis yra panašus į didįjį kūgį.
Tų kūgių atitinkamų atkarpų ilgių santykiai yra vienodi, pavyzdžiui,
$\frac{AC}{AB} = \frac{AO_1}{AO_2} = \frac{r_1}{r_2} = \cdots = k$ — tas santykis vadinamas panašumo koeficientu.

Tų kūgių atitinkamų sričių plotų santykis lygus panašumo koeficiento kvadratui, pavyzdžiui, jų pagrindų plotų santykis:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\pi r_1^2}{\pi r_2^2} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 = k^2.$$

Tų kūgių tūrių santykis lygus panašumo koeficiento kubui:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{1}{3}\pi r_1^2 \cdot AO_1}{\frac{1}{3}\pi r_2^2 \cdot AO_2} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 \cdot \frac{AO_1}{AO_2} = k^2 \cdot k = k^3.$$

Mažasis ir didysis kūgiai yra panašūs. Iš sąlygos žinome, kad tų kūgių pagrindų plotų santykis lygus 9. Todėl galime apskaičiuoti, kam lygus kūgių panašumo koeficientas k:

$$\frac{S_1}{S_2} = 9 = 3^2, \quad k = 3.$$

Mažojo kūgio tūrį pažymėkime x:

$$V_{\text{maž.k}} = x.$$

Tada didžiojo kūgio tūris:

$$V_{\text{didž.k}} = x + 52.$$

Tų kūgių tūrių santykis lygus panašumo koeficiento kubui:

$$\frac{V_{\text{didž.k}}}{V_{\text{maž.k}}} = \frac{x+52}{x} = 3^3.$$

Sprendžiame lygtį:

$$\frac{x+52}{x} = 3^3,$$

$$\frac{x+52}{x} = 27,$$

$$x + 52 = 27x,$$

$$26x = 52,$$

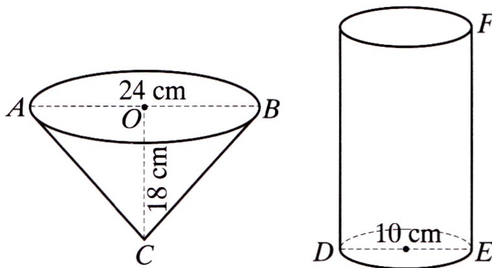
$$x = 2. \quad \left(\text{Pasitikriname } \frac{2+52}{2} = 27.\right)$$

Taigi, mažojo kūgio tūris lygus $2\,\text{cm}^3$, o didžiojo kūgio tūris lygus $2 + 52 = 54\,(\text{cm}^3)$.

Atsakymas. $54\,\text{cm}^3$.

7. Kūgio formos indo aukštis lygus 0,18 m, o jo pagrindo skersmens ilgis yra 0,24 m. Vytenis pasėmė šį indą pilną vandens, o tada jį perpylė į ritinio formos indą, kurio pagrindo skersmens ilgis yra 0,1 m. Koks bus vandens aukštis šiame inde? Atsakymą užrašykite metrais šimtųjų tikslumu.

Sprendimas. Sąlygą galima suprasti taip. *Koks yra ritinio aukštis, jei kūgio ir ritinio tūriai vienodi?*



Duota: $V_k = V_r$,
$AB = 24\,\text{cm}$, $CO = 18\,\text{cm}$
$DE = 10\,\text{cm}$.
Rasti: EF.

Apskaičiuojame kūgio tūrį:

$$V_k = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 12^2 \cdot 18 = 864\pi\ (\text{cm}^3).$$

Ritinio aukštį pažymėję x, užrašome, kam lygus jo tūris:

$$V_r = \pi \cdot 5^2 \cdot x = 25\pi x.$$

Kadangi V_r ir V_k yra lygūs, tai turime lygtį:

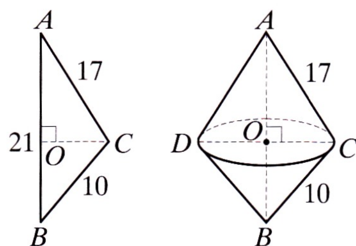
$$25\pi \cdot x = 864\pi, \quad x = \frac{864\pi}{25\pi} = 34{,}56.$$

Vadinasi, vandens aukštis ritinio formos inde bus lygus $34{,}56\,\text{cm} \approx 0{,}35\,\text{m}$.

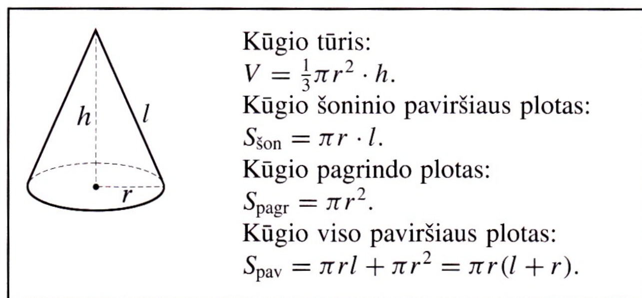
Atsakymas. $\approx 0{,}35\,\text{m}$.

8. Trikampis, kurio kraštinių ilgiai yra 21 cm, 10 cm ir 17 cm, sukamas apie ilgiausiąją kraštinę. Apskaičiuokite gautojo kūno tūrį ir viso paviršiaus plotą.

Gautasis kūnas — tai du „pagrindais sulipdyti" kūgiai.



Duota: $AB = 21$ cm, $AC = 17$ cm, $BC = 10$ cm.
Rasti: V, S_{pav}.



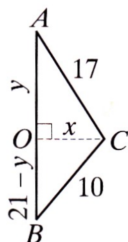
Kūgio tūris:
$V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h.$
Kūgio šoninio paviršiaus plotas:
$S_{\text{šon}} = \pi r \cdot l.$
Kūgio pagrindo plotas:
$S_{\text{pagr}} = \pi r^2.$
Kūgio viso paviršiaus plotas:
$S_{\text{pav}} = \pi rl + \pi r^2 = \pi r(l + r).$

Ieškomas kūno tūris lygus:

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot OC^2 \cdot AO + \frac{1}{3}\pi \cdot OC^2 \cdot OB =$$
$$= \frac{1}{3}\pi \cdot OC^2 \cdot (AO + OB) =$$
$$= \frac{1}{3}\pi \cdot OC^2 \cdot AB = \frac{1}{3}\pi \cdot OC^2 \cdot 21 = 7\pi \cdot OC^2.$$

Vadinasi, reikia apskaičiuoti OC ilgį.

I būdas.



OC pažymėkime x, OA pažymėkime y. Trikampiams AOC ir BOC taikykime Pitagoro teoremą:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 17^2, \\ x^2 + (21 - y)^2 = 10^2. \end{cases}$$

Turime dviejų lygčių su dviem nežinomaisiais sistemą. Matome, kad iš pirmos lygties atėmę antrąją, gausime lygtį su vienu nežinomuoju:

$$\begin{array}{r} -\begin{array}{l} x^2 + y^2 = 17^2, \\ x^2 + (21 - y)^2 = 10^2 \end{array} \\ \hline y^2 - (21 - y)^2 = 17^2 - 10^2. \end{array}$$

Išspręskime gautąją lygtį:

$$y^2 - (441 - 42y + y^2) = (17 - 10) \cdot (17 + 10),$$
$$y^2 - 441 + 42y - y^2 = 7 \cdot 27,$$
$$42y = 189 + 441,$$
$$42y = 630,$$
$$y = \frac{630}{42},$$
$$y = 15.$$

Apskaičiuojame x reikšmę.
Kai $y = 15$, tai

$$x^2 + 15^2 = 17^2,$$
$$x^2 = 17^2 - 15^2,$$
$$x^2 = (17 - 15)(17 + 15),$$
$$x^2 = 2 \cdot 32,$$
$$x^2 = 64,$$
$$x = 8 \quad (x = -8 \text{ netinka pagal sąlygą}).$$

II būdas. Aukštinę galima rasti ir taip.

Herono formulė

a b c

$$S_\triangle = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$
$$p = \frac{a+b+c}{2}.$$

1) Apskaičiuojame $\triangle ABC$ plotą:

$$S = \sqrt{p(p - AB)(p - AC)(p - BC)},$$
$$p = \frac{AB + BC + AC}{2} = \frac{21 + 10 + 17}{2} = 24 \text{ (cm)},$$
$$S = \sqrt{24(24 - 21)(24 - 17)(24 - 10)} =$$
$$= \sqrt{24 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 14} = 84 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

2) Apskaičiuojame OC:

$$\frac{AB \cdot OC}{2} = S,$$
$$OC = \frac{84 \cdot 2}{21} = 8 \text{ (cm)}.$$

Vadinasi, sukinio tūris:

$$V = 7\pi \cdot OC^2 = 7\pi \cdot 8^2 = 448\pi \text{ (cm}^3\text{)}.$$

Apskaičiuokime sukinio paviršiaus plotą:

$$S_{\text{pav}} = \pi \cdot OC \cdot 17 + \pi \cdot OC \cdot 10 = 27\pi \cdot OC = 27\pi \cdot 8 = 216\pi \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Atsakymas. 448π (cm^3), 216π (cm^2).

Kartojimas

K16 (1–4)

1. Apskaičiuokite a, kai $\frac{14^a+14^a}{7^a+7^a+7^a+7^a} = 32$.

   A 1 B 2 C 4 D 5 E 6

2. Didžiausia sveikoji neigiama x reikšmė, tenkinanti nelygybę $\frac{3x-5}{2x+17} \geqslant 0$, yra:

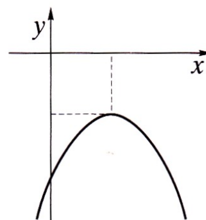
   A -10 B -1 C -8 D -2 E -9

3. Dalmenį $(2{,}34 \cdot 10^{-7}) : (7{,}2 \cdot 10^{-15})$ užrašykite standartine išraiška.

   A $3{,}25 \cdot 10^7$ B $0{,}325 \cdot 10^8$ C $32{,}5 \cdot 10^9$ D $0{,}325 \cdot 10^{-22}$ E $3{,}25 \cdot 10^{-7}$

4. Kurios funkcijos grafiko eskizas pavaizduotas paveiksle?

   A $y = x^2 + 2x - 2$
   B $y = -x^2 + 2x - 2$
   C $y = x^2 - 2x - 2$
   D $y = -x^2 - 2x - 2$
   E $y = -x^2$



5. Funkcijos $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{4-x}} + \frac{5}{\sqrt{x-2}}$ apibrėžimo sritis yra:

   A $(-\infty; -1)$ B $(2; 4)$ C $(-1; 4)$ D $(2; +\infty)$ E $(-\infty; -1) \cup [4; +\infty)$

6. Apskaičiuokite:

   a) $(0{,}25)^{-2} + 100 \cdot (2{,}5)^{-2} + 3^{-3} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^{-3} + (0{,}9)^0$; b) $\frac{2}{\sqrt{6}+3} + \frac{3}{\sqrt{6}-2} - \frac{5}{\sqrt{6}} - 10$.

7. Suprastinkite reiškinį:

   $\left(\frac{x+3}{x^2-3x} + \frac{12}{9-x^2}\right) \cdot \frac{3}{1-\frac{3}{x}}$.

8. a) Raskite funkcijų $f(x) = \frac{3x+2}{4}$ ir $g(x) = -\frac{3}{8}x^2 + \frac{3}{4}x + 2$ grafikų bendrų taškų koordinates.

   b) Išspręskite lygtį: $x^2 - 6x + 5 = \sqrt{x^2 - 2x + 1}$.

   c) Apskaičiuokite $|x - y|$, jei $\begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{61}{4}, \\ xy = \frac{15}{2}. \end{cases}$

9. a) Raskite mažiausiąjį natūralųjį skaičių, tenkinantį nelygybę:

   $\frac{2x^2-13x+21}{x^2-8x+15} \leqslant -1$.

   b) Raskite nelygybės $\frac{3}{|x+6|} \geqslant 1$ didžiausio ir mažiausio sveikųjų sprendinių dalmenį.

10. a) Kokios turi būti a ir b reikšmės, kad tiesės $2x + 5y = a$ ir $7x - by = 9$ būtų lygiagrečios?

    b) Su kuriomis m reikšmėmis lygtys $x^2 + m^2x + (6 - 5m)x = 0$ ir $x^2 + 2(m-3)x + m^2 - 7m + 12 = 0$ yra ekvivalenčios? Raskite tų ekvivalenčių lygčių sprendinius.

11. a) Valtis per 14 valandų upe pasroviui nuplaukė 21 km ir grįžo atgal. Raskite upės tėkmės greitį, kai valties greitis stovinčiame vandenyje yra 4 km/h.

    b) Automobilio greitis 20% didesnis už motociklo greitį. Keliais procentais motociklininkas turi sumažinti greitį, kad jis būtų lygus 80% automobilio greičio?

1. Apskaičiuokite b, kai $\frac{15^b+15^b}{5^b+5^b+5^b+5^b+5^b+5^b} = 27$.

A 1 **B** 2 **C** 4 **D** 5 **E** 6

2. Mažiausia sveikoji x reikšmė, su kuria teisinga nelygybė $\frac{3x+6}{x-6} \leqslant 0$, yra:

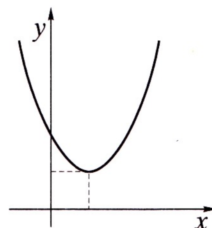
A 6 **B** 5 **C** -2 **D** 7 **E** -1

3. Sandaugą $4{,}8 \cdot 10^{-13} \cdot 8{,}5 \cdot 10^{10}$ užrašykite standartine išraiška.

A $4{,}08 \cdot 10^{-2}$ **B** $40{,}8 \cdot 10^{-3}$ **C** $0{,}408 \cdot 10^{-5}$ **D** $408 \cdot 10^{-4}$ **E** $4{,}08 \cdot 10^{-4}$

4. Kurios funkcijos grafiko eskizas pavaizduotas paveiksle?

A $y = 2x^2 + 4x + 3$
B $y = -2x^2 - 4x + 3$
C $y = -2x^2 + 4x - 3$
D $y = 2x^2 - 4x - 3$
E $y = 2x^2 - 4x + 3$



5. Funkcijos $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{\frac{1-x}{2-x}}$ apibrėžimo sritis yra:

A $(-\infty; 1]$ **B** $(-\infty; 1] \cup (2; +\infty)$ **C** $[1; 2)$ **D** $(2; +\infty)$ **E** $(1; +\infty)$

6. Apskaičiuokite:

a) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-10} \cdot 27^{-3} + (0{,}2)^{-4} \cdot 25^{-2} + \left(64^{-\frac{1}{9}}\right)^{-3}$; b) $3\left(\frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} + \frac{5}{\sqrt{7}+\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}\right) - 7$.

7. Suprastinkite reiškinį:

$\frac{5}{1+\frac{4}{x}} \cdot \left(\frac{x-4}{x^2+4x} - \frac{16}{16-x^2}\right)$.

8. a) Raskite funkcijų $f(x) = \frac{3x-4}{4}$ ir $g(x) = \frac{9}{4}x - \frac{3}{8}x^2 - 1$ grafikų bendrų taškų koordinates.

b) Išspręskite lygtį: $x^2 - 7x + 12 = \sqrt{x^2 - 8x + 16}$.

c) Apskaičiuokite $|x - y|$, jei $\begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{25}{36}, \\ xy = \frac{1}{3}. \end{cases}$

9. a) Raskite mažiausiąjį neigiamą sveikąjį skaičių, tenkinantį nelygybę:

$\frac{2x^2+6x+4}{x^2+x-2} < 1$.

b) Raskite nelygybės $\frac{2}{|x-4|} > 1$ didžiausio ir mažiausio sveikųjų sprendinių sandaugą.

10. a) Kokia turi būti a reikšmė, kad tiesės $3x - 7y = 15$ ir $46x + ay = 60$ būtų lygiagrečios?

b) Raskite a reikšmes, su kuriomis lygtys $x^2 - 3(a^2 - 5a - 6)x = 0$ ir $x^2 + 6(a-6)x + 2a^2 + 9a + 9 = 0$ būtų ekvivalenčios.
Išspręskite tas ekvivalenčias lygtis.

11. a) Valtis per 8 valandas 20 minučių upe pasroviui nuplaukė 80 km ir grįžo atgal. Raskite valties greitį stovinčiame vandenyje, kai upės tėkmės greitis yra 4 km/h.

b) Prekės kaina padidėjo 25%. Keliais procentais reikia sumažinti naująją prekės kainą, kad ji būtų 10% didesnė už jos pradinę kainą?

1. Apskaičiuokite a, kai $\frac{14^a+14^a}{7^a+7^a+7^a+7^a}=32$.

A 1 **B** 2 **C** 4 **D** 5 **E** 6

Iš pateiktųjų atsakymų vienintelis yra teisingas. Teisingą atsakymą galima rasti įstatant duotąsias reikšmes ir tikrinant, su kuria jų teisinga lygybė. O galima išspręsti lygtį.

I būdas.
Tikriname **A**. Kai $a=1$, tai:

$$\frac{14^1+14^1}{7^1+7^1+7^1+7^1}=\frac{14+14}{7+7+7+7}=\frac{28}{28}=1\neq 32 \text{ — atsakymas A netinka.}$$

Tikriname **B**. Kai $a=2$, tai:

$$\frac{14^2+14^2}{7^2+7^2+7^2+7^2}=\frac{196+196}{49+49+49+49}=\frac{2\cdot 196}{4\cdot 49}=\frac{2\cdot 2\cdot 98}{4\cdot 49}=\frac{98}{49}=2\neq 32.$$

Toliau skaičiai vis didesni, skaičiuodami galime apsirikti. Verta suprastinti lygybės kairiosios pusės reiškinį:

$$\frac{14^a+14^a}{7^a+7^a+7^a+7^a}=\frac{2\cdot 14^a}{4\cdot 7^a}=\frac{1}{2}\cdot\frac{14^a}{7^a}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{14}{7}\right)^a=\frac{1}{2}\cdot 2^a=2^{a-1}.$$

$$\frac{a^m}{b^m}=\left(\frac{a}{b}\right)^m,\quad \frac{a^m}{a^n}=a^{m-n},\quad a^m\cdot a^n=a^{m+n},\quad a^{-n}=\frac{1}{a^n}.$$

Tikriname **C**. Kai $a=4$, tai:

$$2^{a-1}=2^{4-1}=2^3=8\neq 32 \text{ — C netinka.}$$

Akivaizdu, kad tinka atsakymas **E**:

$$2^{6-1}=2^5=32.$$

II būdas. Sprendžiame lygtį.

$$\frac{14^a+14^a}{7^a+7^a+7^a+7^a}=32,$$
$$\frac{2\cdot 14^a}{4\cdot 7^a}=32,$$
$$\left(\frac{14}{7}\right)^a=32\cdot 2,$$
$$2^a=64,$$
$$a=6.$$

Atsakymas. **E**.

2. Didžiausia sveikoji neigiama x reikšmė, tenkinanti nelygybę $\frac{3x-5}{2x+17} \geqslant 0$, yra:
A -10 **B** -1 **C** -8 **D** -2 **E** -9

I būdas. Tikriname atsakymus. Verta pradėti nuo didžiausios iš duotųjų reikšmės.
Kai $x = -1$, tai

$$\frac{3 \cdot (-1) - 5}{2 \cdot (-1) + 17} = \frac{-3-5}{-2+17} = \frac{-8}{15} < 0 \text{ — atsakymas } \mathbf{B} \text{ netinka.}$$

Kai $x = -2$, tai

$$\frac{3 \cdot (-2) - 5}{2 \cdot (-2) + 17} = \frac{-11}{13} < 0 \text{ — } \mathbf{D} \text{ netinka.}$$

Čia verta pastebėti, kad, kai x reikšmė neigiama (o visos atsakymuose duotos x reikšmės yra neigiami skaičiai), tai trupmenos skaitiklis $3x - 5$ — neigiamas. Vadinasi, trupmena $\frac{3x-5}{2x+17}$ bus didesnė už 0, kai vardiklis $2x + 17$ bus neigiamas. Šią sąlygą tenkina **A** -10 ir **E** -9. Kadangi $-9 > -10$, tai tinka atsakymas **E**. Iš tikrųjų, kai $x = -9$, tai

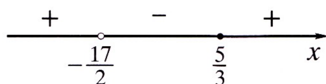
$$\frac{3 \cdot (-9) - 5}{2 \cdot (-9) + 17} = \frac{-33}{-1} > 0 \text{ — nelygybė teisinga.}$$

Nelygybė yra teisinga ir kai $x = -10$ (atsakymas **A**). Bet uždavinys prašo rasti ***didžiausią*** neigiamą x reikšmę ($-10 < -9$).

II būdas. Sprendžiame nelygybę:

$$\frac{3x-5}{2x+17} \geqslant 0,$$

$$3x - 5 = 0, x = \frac{5}{3}; \quad 2x + 17 = 0, x = -\frac{17}{2};$$



Nelygybės sprendiniai yra:

$$x \in (-\infty; -8{,}5) \cup \left[\frac{5}{3}; +\infty\right).$$

Didžiausias sveikasis neigiamas sprendinys yra $x = -9$.

Atsakymas. **E.**

3. Dalmenį $(2{,}34 \cdot 10^{-7}) : (7{,}2 \cdot 10^{-15})$ užrašykite standartine išraiška.
A $3{,}25 \cdot 10^{7}$ **B** $0{,}325 \cdot 10^{8}$ **C** $32{,}5 \cdot 10^{9}$ **D** $0{,}325 \cdot 10^{-22}$ **E** $3{,}25 \cdot 10^{-7}$

> Bet kurį skaičių galima užrašyti standartiniu pavidalu:
>
> $$A \cdot 10^{n}, \text{ kur } 1 \leqslant |A| < 10, n \in \mathbf{Z}.$$
>
> Pavyzdžiui:
> $258 = 2{,}58 \cdot 10^{2}$; $0{,}23 = 2{,}3 \cdot 10^{-1}$; $-71 = -7{,}1 \cdot 10$.

I būdas.

Dalykime:

$$(2{,}34 \cdot 10^{-7}) : (7{,}2 \cdot 10^{-15}) = \frac{2{,}34 \cdot 10^{-7}}{7{,}2 \cdot 10^{-15}} = \frac{2{,}34}{7{,}2} \cdot 10^{-7-(-15)} =$$
$$= 0{,}325 \cdot 10^{8} = 3{,}25 \cdot 10^{7}.$$

Tinka atsakymas **A**.

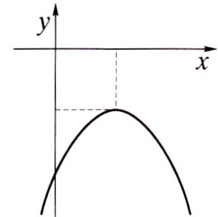
II būdas. Galima pastebėti, kad atsakymai **B**, **C** ir **D** netinka, nes jų skaičiai nėra standartinės išraiškos: $0{,}325 < 1$; $32{,}5 > 10$.

Kad iš likusių dviejų atsakymų **A** ir **E** tinka tik **A** galima spėti dalijant tik duotojo reiškinio dešimties laipsnius: $10^{-7} : 10^{-15} = 10^{-7-(-15)} = 10^{-7+15} = 10^{8}$.

Atsakymas. **A**.

4. Kurios funkcijos grafiko eskizas pavaizduotas paveiksle?

A $y = x^2 + 2x - 2$
B $y = -x^2 + 2x - 2$
C $y = x^2 - 2x - 2$
D $y = -x^2 - 2x - 2$
E $y = -x^2$



Pavaizduotas grafikas yra parabolė. Parabolės lygtis yra $y = ax^2 + bx + c$ (a, b, c — skaičiai, $a \neq 0$).

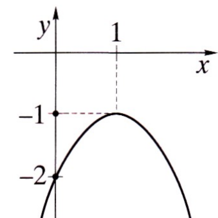
Pavaizduotos parabolės šakos nukreiptos žemyn, todėl koeficientas a yra *neigiamas*.

Iš pateiktųjų netinka atsakymai **A** ir **C**, nes juose $a = 1 > 0$. Atsakymas **E** $y = -x^2$ netinka, nes parabolė y ašį kerta taške $c < 0$, o ne koordinačių pradžios taške.

Iš likusiųjų atsakymų **B** $y = -x^2 + 2x - 2$ ir **D** $y = -x^2 - 2x - 2$ galime teigti, kad parabolė y ašį kerta taške -2 ($c = -2$). Dabar galima spėti, kad parabolės viršūnės taško koordinatės yra $(1; -1)$.

Tikriname, kuriai iš parabolių (**B** ar **D**) tas taškas priklauso:

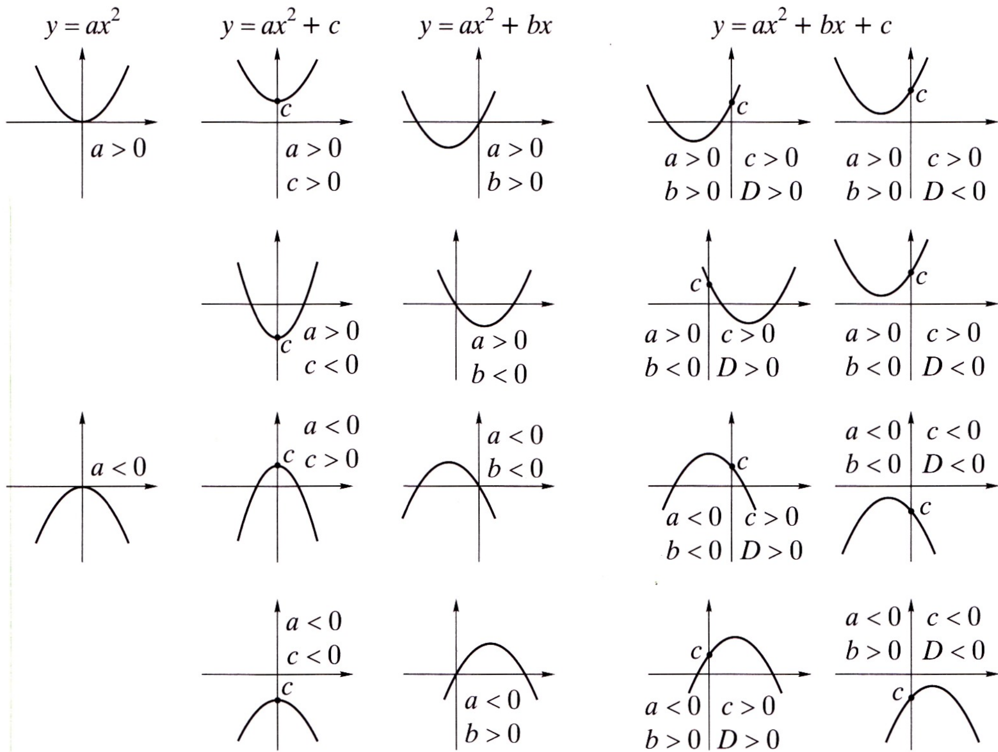
B: $-1 \stackrel{?}{=} -1^2 + 2 \cdot 1 - 2$,
$-1 \stackrel{?}{=} -1 + 2 - 2$,
$-1 = -1$ — taškas $(1; -1)$ priklauso parabolei $y = -x^2 + 2x - 2$.



Parabolei **D** taškas $(1; -1)$ nepriklauso. Iš tikrųjų:

$$-1 \neq -1^2 - 2 \cdot 1 - 2.$$

Atsakymas. **B**.



Funkcijos $y = ax^2 + bx + c$ (a, b, c — skaičiai, $a \neq 0$) grafikas yra parabolė.
Kai $a > 0$, tai parabolės šakos nukreiptos aukštyn.
Kai $a < 0$, tai parabolės šakos nukreiptos žemyn.
Parabolė Oy ašį kerta taške c.
Kai $D = b^2 - 4ac < 0$, tai parabolė nekerta Ox ašies.
Kai $D = b^2 - 4ac > 0$, tai parabolė Ox ašį kerta taškuose $x_1 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$.
Kai $D = b^2 - 4ac = 0$, tai parabolės viršūnė yra Ox ašyje ($x = \frac{-b}{2a}$).

5. Funkcijos $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{4-x}} + \frac{5}{\sqrt{x-2}}$ apibrėžimo sritis yra:

A $(-\infty; -1)$ **B** $(2; 4)$ **C** $(-1; 4)$ **D** $(2; +\infty)$ **E** $(-\infty; -1) \cup [4; +\infty)$

$\sqrt{f(x)}$ apibrėžta, kai $f(x) \geqslant 0$;
$\frac{f(x)}{g(x)}$ apibrėžta, kai $g(x) \neq 0$.

Funkcija $f(x)$ apibrėžta (turi prasmę), kai:

$$\frac{x+1}{4-x} \geqslant 0 \quad \text{ir} \quad x - 2 > 0.$$

Sprendžiame nelygybę:

$$\frac{x+1}{4-x} \geqslant 0, \qquad x \in [-1; 4).$$

(Skaičių tiesė: ženklai $-$, $+$, $-$; taškai -1, 4; ašis x.)

Sprendžiame nelygybę:

$$x - 2 > 0, \quad x > 2, \quad x \in (2; +\infty).$$

Abiejų nelygybių bendrieji sprendiniai ir yra funkcijos $f(x)$ apibrėžimo sritis:

$$\begin{cases} x \in [-1; 4), \\ x \in (2; +\infty); \end{cases} \qquad x \in (2; 4).$$

(Skaičių tiesė: taškai -1, 2, 4; ašis x.)

Vadinasi, teisingas yra atsakymas **B** (2; 4).

Atsakymas. **B**.

6a. Apskaičiuokite $(0{,}25)^{-2} + 100 \cdot (2{,}5)^{-2} + 3^{-3} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^{-3} + (0{,}9)^0$.

$$\left(\tfrac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\tfrac{b}{a}\right)^n, \quad a^{-n} = \tfrac{1}{a^n}, \quad a^0 = 1$$

Dešimtaines trupmenas keiskime paprastosiomis:

$$\left(\frac{25}{100}\right)^{-2} + 100 \cdot \left(\frac{25}{10}\right)^{-2} + \frac{1}{3^3} \cdot 9^3 + 1 = \left(\frac{4}{1}\right)^2 + 100 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \frac{1 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9}{27} + 1 =$$
$$= 16 + 4 \cdot 4 + 27 + 1 = 60.$$

Atsakymas. 60.

6b. Apskaičiuokite $\frac{2}{\sqrt{6}+3} + \frac{3}{\sqrt{6}-2} - \frac{5}{\sqrt{6}} - 10$.

Pirmiausia panaikinkime iracionalumą vardikliuose (trupmenas $\frac{2}{\sqrt{6}+3}$, $\frac{3}{\sqrt{6}-2}$ ir $\frac{5}{\sqrt{6}}$ pertvarkykime į joms lygias trupmenas be šaknų vardiklyje):

$$\frac{2}{\sqrt{6}+3} = \frac{2 \cdot (\sqrt{6}-3)}{(\sqrt{6}+3)(\sqrt{6}-3)} = \frac{2\sqrt{6}-6}{(\sqrt{6})^2 - 3^2} = \frac{2\sqrt{6}-6}{6-9} = \frac{2\sqrt{6}-6}{-3};$$

$$\frac{3}{\sqrt{6}-2} = \frac{3 \cdot (\sqrt{6}+2)}{(\sqrt{6}-2)(\sqrt{6}+2)} = \frac{3 \cdot (\sqrt{6}+2)}{(\sqrt{6})^2 - 2^2} = \frac{3 \cdot (\sqrt{6}+2)}{6-4} = \frac{3\sqrt{6}+6}{2};$$

$$\frac{5}{\sqrt{6}} = \frac{5\sqrt{6}}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} = \frac{5\sqrt{6}}{6}.$$

Vadinasi, duotasis reiškinys lygus reiškiniui:

$$-\frac{2\sqrt{6}-6}{3} + \frac{3\sqrt{6}+6}{2} - \frac{5\sqrt{6}}{6} - 10 = \frac{-4\sqrt{6} + 12 + 9\sqrt{6} + 18 - 5\sqrt{6}}{6} - 10 =$$
$$= \frac{30}{6} - 10 = 5 - 10 = -5.$$

Atsakymas. -5.

7. Suprastinkite reiškinį: $\left(\frac{x+3}{x^2-3x}+\frac{12}{9-x^2}\right)\cdot\frac{3}{1-\frac{3}{x}}$.

Sudedame skliaustuose esančias trupmenas:

$$\frac{x+3}{x^2-3x}+\frac{12}{9-x^2}=\frac{x+3}{x(x-3)}+\frac{12}{3^2-x^2}=\frac{x+3}{x(x-3)}+\frac{12}{(3-x)(3+x)}=$$
$$=\frac{x+3}{x(x-3)}-\frac{12}{(x-3)(x+3)}=\frac{(x+3)\cdot(x+3)-12\cdot x}{x(x-3)(x+3)}=$$
$$=\frac{x^2+6x+9-12x}{x(x-3)(x+3)}=\frac{x^2-6x+9}{x(x-3)(x+3)}=\frac{(x-3)^2}{x(x-3)(x+3)}=\frac{x-3}{x(x+3)}.$$

Sudauginame:

$$\frac{x-3}{x(x+3)}\cdot\frac{3}{1-\frac{3}{x}}=\frac{x-3}{x(x+3)}\cdot\frac{3}{\frac{x-3}{x}}=\frac{x-3}{x(x+3)}\cdot\frac{3x}{x-3}=\frac{3}{x+3}.$$

Atsakymas. $\frac{3}{x+3}$.

8a. Raskite funkcijų $f(x)=\frac{3x+2}{4}$ ir $g(x)=-\frac{3}{8}x^2+\frac{3}{4}x+2$ grafikų bendrų taškų koordinates.

Grafikų bendrų taškų koordinates x rasime išsprendę lygtį $f(x)=g(x)$:

$$\frac{3x+2}{4}=-\frac{3}{8}x^2+\frac{3}{4}x+2 \mid \cdot 8,$$
$$2(3x+2)=-3x^2+6x+16,$$
$$6x+4=-3x^2+6x+16,$$
$$3x^2=12,$$
$$x^2=4,$$
$$x_1=-2, \quad x_2=2.$$

Funkcijų grafikai turi du bendrus taškus, kurių abscisės lygios -2 ir 2. Randame bendrųjų taškų koordinates y. Jas galima apskaičiuoti įsistačius x reikšmes į bet kurios funkcijos lygtį. Kai $x=-2$, tai

$$f(-2)=\frac{3\cdot(-2)+2}{4}=\frac{-6+2}{4}=-1.$$

Pravartu pasitikrinti, ar $g(-2)=-1$:

$$g(-2)=-\frac{3}{8}\cdot(-2)^2+\frac{3}{4}\cdot(-2)+2=-\frac{3}{2}-\frac{3}{2}+2=-\frac{6}{2}+2=-3+2=-1.$$

Kai $x=2$, tai

$$f(2)=\frac{3\cdot 2+2}{4}=\frac{8}{4}=2.$$

$(g(2)=-\frac{3}{8}\cdot 4+\frac{3}{4}\cdot 2+2=2.)$

Atsakymas. $(-2;-1)$, $(2;2)$.

8b. Išspręskite lygtį: $x^2 - 6x + 5 = \sqrt{x^2 - 2x + 1}$.

Pastebėkime, kad lygtis turi prasmę, kai $x^2 - 2x + 1 \geqslant 0$ ir kai $x^2 - 6x + 5 \geqslant 0$, t. y. lygties apibrėžimo sritis:

$$\begin{cases} x^2 - 2x + 1 \geqslant 0, \\ x^2 - 6x + 5 \geqslant 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-1)^2 \geqslant 0, \\ (x-1)(x-5) \geqslant 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x \in (-\infty; +\infty), \\ x \in (-\infty; 1] \cup [5; +\infty); \end{cases} \Rightarrow x \in (-\infty; -1] \cup [5; +\infty).$$

Taigi duotosios lygties sprendiniai gali būti tik gautųjų intervalų skaičiai.
Spręskime lygtį. Pirma mintis — kelti abi puses kvadratu (naikinti šaknį). Bet, pakėlę kvadratu, gausime 4-tojo laipsnio lygtį, kurios bendruoju pavidalu spręsti nemokame.
Čia geriausia pastebėti, kad pošaknyje esantis reiškinys $x^2 - 2x + 1$ lygus kvadratui $(x-1)^2$:

$$x^2 - 6x + 5 = \sqrt{x^2 - 2x + 1},$$

$$x^2 - 6x + 5 = \sqrt{(x-1)^2},$$

$$\boxed{\sqrt{a^2} = |a|}$$

$$x^2 - 6x + 5 = |x - 1|.$$

$$\boxed{|a| = \left[\begin{array}{l} a, \ a \geqslant 0 \\ -a, \ a < 0 \end{array}\right.}$$

Naikiname modulį:

- kai $x - 1 \geqslant 0$, tai turime lygtį:

$$x^2 - 6x + 5 = x - 1,$$
$$x^2 - 7x + 6 = 0, \quad D = 25,$$
$$x_1 = 1, \quad x_2 = 6.$$

$x = 1$ ir $x = 6$ yra duotosios lygties sprendiniai, nes su tomis x reikšmėmis $x - 1 \geqslant 0$ ir jos priklauso lygties apibrėžimo sričiai. Žinoma sprendinius visada pravartu tikrinti:
kai $x = 1$, tai lygybė $1^2 - 6 \cdot 1 + 5 = \sqrt{1^2 - 2 \cdot 1 + 1}$, $1 - 6 + 5 = \sqrt{0}$ yra teisinga;
kai $x = 6$, tai lygybė $6^2 - 6 \cdot 6 + 5 = \sqrt{6^2 - 2 \cdot 6 + 1}$, $36 - 36 + 5 = \sqrt{36 - 12 + 1}$, $5 = \sqrt{25}$ yra teisinga.

- kai $x - 1 < 0$, tai turime lygtį:

$$x^2 - 6x + 5 = -(x - 1),$$
$$x^2 - 6x + 5 = -x + 1,$$
$$x^2 - 5x + 4 = 0, \quad D = 9,$$
$$x_1 = 1, \quad x_2 = 4.$$

Gautasis sprendinys $x = 1$ netinka, nes su šia x reikšme $x - 1 = 0$, o sprendinys $x = 4$ netinka, nes $4 - 1 > 0$. (Beje, sprendinį $x = 1$ gavome, kai ėmėme atvejį $x - 1 \geqslant 0$.)

Verta pasitikrinti, ar tikrai $x = 4$ nėra lygties sprendinys. Iš tikrųjų:
kai $x = 4$, tai lygybė

$$4^2 - 6 \cdot 4 + 5 = \sqrt{4^2 - 2 \cdot 4 + 1},$$
$$16 - 24 + 5 = \sqrt{16 - 8 + 1},$$
$$-3 = \sqrt{9} \text{ yra neteisinga.}$$

Pastaba. Lygtis $x^2 - 6x + 5 = \sqrt{x^2 - 2x + 1}$ yra ekvivalenti lygčiai

$$x^2 - 6x + 5 = |x - 1|,$$

o pastaroji ekvivalenti lygčių sistemoms:

$$\begin{cases} x - 1 \geqslant 0, \\ x^2 - 6x + 5 = x - 1; \end{cases} \qquad \begin{cases} x - 1 < 0, \\ x^2 - 6x + 5 = -x + 1. \end{cases}$$

Šių sistemų sprendiniai

$$\begin{cases} x \geqslant 1, \\ x_1 = 1, x_2 = 6; \end{cases} \qquad \begin{cases} x < 1, \\ x_1 = 1, x_2 = 4 \end{cases}$$

ir yra duotosios lygties sprendiniai.

Atsakymas. 1; 6.

8c. Apskaičiuokite $|x - y|$, jei $\begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{61}{4}, \\ xy = \frac{15}{2}. \end{cases}$

Turime dviejų lygčių su dviem nežinomaisiais sistemą

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{61}{4}, \\ xy = \frac{15}{2}, \end{cases}$$

bet neverta jos spręsti.
Pastebėkime, kad antrąją lygtį padauginę iš 2 ir iš pirmosios atėmę antrąją, kairėje pusėje gausime

$$x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2.$$

O šaknis iš $(x - y)^2$ lygi $|x - y|$ — ką ir reikia rasti. Taip ir spręskime:

$$-\begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{61}{4} \\ 2xy = 15 \end{cases}$$

$$x^2 - 2xy + y^2 = \frac{1}{4},$$
$$(x - y)^2 = \frac{1}{4},$$
$$\sqrt{(x - y)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}},$$
$$|x - y| = \frac{1}{2}.$$

Atsakymas. $\frac{1}{2}$.

9a. Raskite mažiausiąjį natūralųjį skaičių, tenkinantį nelygybę: $\frac{2x^2-13x+21}{x^2-8x+15} \leqslant -1$.

Sprendžiame racionaliąją nelygybę:

$$\frac{2x^2 - 13x + 21}{x^2 - 8x + 15} + 1 \leqslant 0,$$
$$\frac{2x^2 - 13x + 21 + x^2 - 8x + 15}{x^2 - 8x + 15} \leqslant 0,$$
$$\frac{3x^2 - 21x + 36}{x^2 - 8x + 15} \leqslant 0 \mid : 3,$$
$$\frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 8x + 15} \leqslant 0.$$

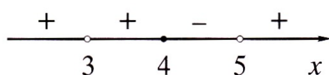
Skaitiklį ir vardiklį skaidome dauginamaisiais:

$$x^2 - 7x + 12 = 0, \quad D = 1, \quad x_1 = 3, x_2 = 4,$$
$$x^2 - 7x + 12 = (x - 3)(x - 4);$$
$$x^2 - 8x + 15 = 0, \quad D = 4, \quad x_1 = 3, x_2 = 5,$$
$$x^2 - 8x + 15 = (x - 3)(x - 5).$$

Gavome:

$$\frac{(x - 3)(x - 4)}{(x - 3)(x - 5)} \leqslant 0.$$

Remiamės intervalų metodu, atsimindami, kad $x \neq 3$, $x \neq 5$:



Nelygybės sprendiniai:

$$x \in [4; 5).$$

Mažiausias natūralusis gautojo intervalo skaičius yra 4.

Atsakymas. 4.

9b. Raskite nelygybės $\frac{3}{|x+6|} \geqslant 1$ didžiausio ir mažiausio sveikųjų sprendinių dalmenį.

Nelygybė ekvivalenti sistemoms:

$$1) \begin{cases} x + 6 < 0, \\ \frac{3}{-(x+6)} \geqslant 1; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x + 6 > 0, \\ \frac{3}{x+6} \geqslant 1. \end{cases}$$

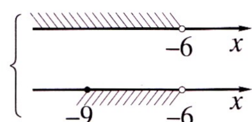
Sprendžiame sistemas:

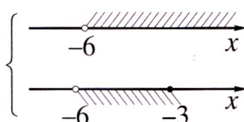
1) $\begin{cases} x < -6, \\ \frac{3}{-x-6} - 1 \geqslant 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x > -6, \\ \frac{3}{x+6} - 1 \geqslant 0; \end{cases}$

$\begin{cases} x < -6, \\ \frac{3+x+6}{-x-6} \geqslant 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x > -6, \\ \frac{3-x-6}{x+6} \geqslant 0; \end{cases}$

$\begin{cases} x < -6, \\ -\frac{x+9}{x+6} \geqslant 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x > -6, \\ \frac{-x-3}{x+6} \geqslant 0; \end{cases}$

$\begin{cases} x < -6, \\ \frac{x+9}{x+6} \leqslant 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x > -6, \\ \frac{x+3}{x+6} \leqslant 0. \end{cases}$





$x \in [-9; -6)$; $x \in (-6; -3]$.

Didžiausias sveikasis duotosios nelygybės sprendinys yra -3, mažiausias sveikasis sprendinys yra -9. Randame šių sprendinių dalmenį:

$$-3 : (-9) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}.$$

Atsakymas. $\frac{1}{3}$.

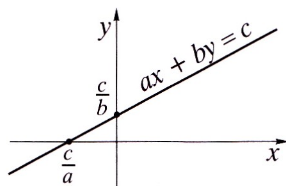
10a. Kokios turi būti a ir b reikšmės, kad tiesės $2x + 5y = a$ ir $7x - by = 9$ būtų lygiagrečios?

I būdas.

Lygties su dviem nežinomaisiais

$$ax + by = c \quad (a, b, c \text{ — skaičiai})$$

sprendiniai $(x; y)$ išsidėstę tiesėje:



Tiesės $a_1x + b_1y = c_1$ ir $a_2x + b_2y = c_2$ yra lygiagrečios, kai

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}.$$

Ieškome a ir b tokių, kad

$$\frac{2}{7} = \frac{5}{-b} \neq \frac{a}{9}.$$

Iš lygybės

$$\frac{2}{7} = \frac{5}{-b}$$

randame b:

$$-2b = 5 \cdot 7, \quad b = \frac{5 \cdot 7}{-2}, \quad b = -\frac{35}{2}.$$

Iš nelygybės

$$\frac{2}{7} \neq \frac{a}{9}$$

randame a:

$$a \neq \frac{2 \cdot 9}{7}, \quad a \neq \frac{18}{7}.$$

II būdas.

Tiesės $y = k_1x + b_1$ ir $y = k_2x + b_2$ yra lygiagrečios, kai $k_1 = k_2$, $b_1 \neq b_2$.

Iš abiejų lygčių išsireiškiame y:

$$2x + 5y = a, \quad 5y = a - 2x, \quad y = -\frac{2}{5}x + \frac{a}{5};$$
$$7x - by = 9, \quad -by = -7x + 9, \quad y = \frac{7}{b}x + \frac{9}{-b}.$$

Tiesės lygiagrečios, kai

$$-\frac{2}{5} = \frac{7}{b}, \quad \frac{a}{5} \neq \frac{9}{-b}.$$

Randame b ir a reikšmes:

$$-\frac{2}{5} = \frac{7}{b}, \quad b = -\frac{35}{2};$$
$$\frac{a}{5} \neq \frac{9}{-b}, \quad a \neq \frac{45}{-b} = \frac{45}{\frac{35}{2}} = \frac{45 \cdot 2}{35} = \frac{18}{7}.$$

Atsakymas. $b = -\frac{35}{2}$, $a \neq \frac{18}{7}$.

10b. Su kuriomis m reikšmėmis lygtys

$$x^2 + m^2x + (6 - 5m)x = 0 \quad \text{ir} \quad x^2 + 2(m-3)x + m^2 - 7m + 12 = 0$$

yra ekvivalenčios?
Raskite tų ekvivalenčių lygčių sprendinius.

Lygtys, kurių sprendinių aibės sutampa, vadinamos ekvivalenčiomis.

Pastebėkime, kad pirmoji lygtis

$$x^2 + m^2x + (6 - 5m)x = 0$$

turi sprendinį $x = 0$. Vadinasi, šį sprendinį turi ir antroji lygtis

$$x^2 + 2(m-3)x + m^2 - 7m + 12 = 0,$$

t. y. turi būti teisinga lygybė:

$$0^2 + 2(m-3) \cdot 0 + m^2 - 7m + 12 = 0.$$

Randame m reikšmes, su kuriomis ta lygybė yra teisinga:

$$m^2 - 7m + 12 = 0, \quad D = 1,$$
$$m_1 = \frac{7-1}{2} = 3, \quad m_2 = \frac{7+1}{2} = 4.$$

Kai $m = 3$, turime lygtis:

$$x^2 + 9x - 9x = 0, \quad x^2 + 9 - 21 + 12 = 0;$$
$$x^2 = 0, \quad x^2 = 0.$$

Jų sprendiniai $x = 0$.
Kai $m = 4$, turime lygtis:

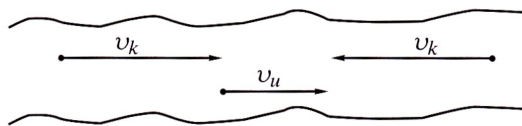
$$x^2 + 16x - 14x = 0, \quad x^2 + 2x + 16 - 28 + 12 = 0;$$
$$x^2 + 2x = 0, \quad x^2 + 2x = 0.$$

Jų sprendiniai:

$$x(x+2) = 0, \quad x = 0, \quad x = -2.$$

Atsakymas. Lygtys ekvivalenčios, kai
- $m = 3$ — sprendiniai $x = 0$;
- $m = 4$ — sprendiniai $x = -2$; $x = 0$.

11a. Valtis per 14 valandų upe pasroviui nuplaukė 21 km ir grįžo atgal. Raskite upės tėkmės greitį, kai valties greitis stovinčiame vandenyje yra 4 km/h.

> $s = v \cdot t$, s — kelias, v — greitis, t — laikas.
>
> 
>
>
> v_k — katerio greitis, v_u — upės tėkmės greitis.
> Plaukiant kateriu pasroviui, greitis kranto atžvilgiu lygus
>
> $$v_k + v_u,$$
>
> plaukiant prieš srovę:
>
> $$v_k - v_u.$$

Upės tėkmės greitį pažymėkime x km/h.

Plaukiant pasroviui, greitis kranto atžvilgiu buvo lygus

$$4 + x \ (\text{km/h});$$

plaukiant prieš srovę

$$4 - x \ (\text{km/h}).$$

Plaukdami pasroviui užtrukome

$$\frac{21}{4+x} \ (\text{h}),$$

o plaukdami prieš srovę

$$\frac{21}{4-x} \ (\text{h}).$$

Iš viso užtrukome

$$\frac{21}{4+x} + \frac{21}{4-x} = 14.$$

Sprendžiame lygtį

$$\frac{21}{4+x} + \frac{21}{4-x} = 14 \;\Big|\; \cdot (4+x)(4-x) \neq 0,$$
$$21 \cdot (4-x) + 21 \cdot (4+x) = 14 \cdot (4+x) \cdot (4-x),$$
$$21 \cdot 4 - 21x + 21 \cdot 4 + 21x = 14 \cdot (16 - x^2),$$
$$21 \cdot 4 \cdot 2 = 14 \cdot (16 - x^2),$$
$$\frac{21 \cdot 4 \cdot 2}{14} = 16 - x^2,$$
$$12 = 16 - x^2,$$
$$x^2 = 4,$$
$$x = 2 \quad (x = -2 \text{ netinka pagal prasmę}).$$

Atsakymas. 2 km/h.

11b. Automobilio greitis 20% didesnis už motociklo greitį. Keliais procentais motociklininkas turi sumažinti greitį, kad jis būtų lygus 80% automobilio greičio?

I būdas.
Motociklo greitį pažymėkime x. Tada automobilio greitis $1{,}2x$.
80% automobilio greičio lygu

$$1{,}2x \cdot 0{,}8 = 0{,}96x.$$

Motociklas greitį turi sumažinti

$$x - 0{,}96x = 0{,}04x,$$

t. y. 4%.

II būdas.
Laikykime, kad motociklas važiuoja 100 km/h greičiu. Tada automobilio greitis lygus 120 km/h.
Randame 80% automobilio greičio:

$$\begin{array}{ccc} 120 & — & 100\%, \\ x & — & 80\%; \end{array} \quad \frac{120}{x} = \frac{100}{80}, \quad x = \frac{120 \cdot 80}{100} = 96 \text{ (km/h)}.$$

(Arba taip: $120 : 100 \cdot 80 = 96$; arba taip: $120 \cdot 0{,}8 = 96$.)
Vadinasi, motociklininkas turi greitį sumažinti

$$100 - 96 = 4 \text{ km/h},$$

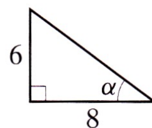
o tai sudaro 4% motociklininko greičio.

Atsakymas. 4%.

Kartojimas

K17 (5–7)

1. Remiantis brėžiniu, $\sin\alpha =$

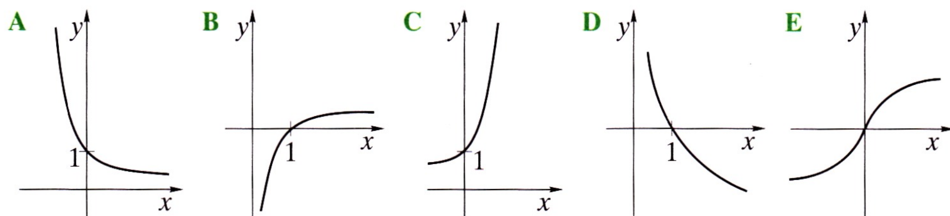


A $\frac{3}{4}$ **B** $\frac{3}{5}$ **C** $\frac{4}{5}$ **D** $\frac{5}{4}$ **E** $\frac{4}{3}$

2. Lygties $\lg x = -2$ sprendinys yra:

A $\sqrt{10}$ **B** 100 **C** 0,01 **D** $\frac{1}{\sqrt{2}}$ **E** $\frac{1}{2}$

3. Kuris iš grafikų yra funkcijos $y = 5^x$ grafikas?



4. Reiškinio $\log_{\sqrt{8}}(4\sqrt{2})$ reikšmė yra:

A 2 **B** $\frac{4}{15}$ **C** $\frac{1}{2}$ **D** $\frac{5}{3}$ **E** $\frac{15}{4}$

5. Tiksli $\cos 15^\circ$ reikšmė yra:

A $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$ **B** $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2}$ **C** $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ **D** $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ **E** $\frac{\sqrt{6}}{2}$

6. Išspręskite lygtį:

a) $\frac{1}{2}\lg(x-9) + \lg(\sqrt{2x-1}) = 1$; b) $\log_5 x \cdot \log_{16} 25 = 1$; c) $x^{\log_2 x + 2} = 8$.

7. Išspręskite nelygybę:

a) $\left(\frac{1}{10}\right)^{4x^2-2x-2} < \left(\frac{1}{10}\right)^{4x^2-8}$; b) $3^{\frac{-5x}{x-1}} - 9^{\frac{x-12}{2}} \leqslant 0$.

8. Raskite sumą sveikųjų skaičių, kurie nėra nelygybės $4^{x-3} + 2 > 3 \cdot 2^{x-3}$ sprendiniai.

9. a) Raskite lygties $\sin(2x) + 2\cos^2 x = 0$ sprendinių skaičių intervale $[-2\pi; 2\pi]$.

b) Raskite lygties $\cos^3\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2} - \sin^3\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{1}{4}$ sprendinius intervale $\left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

10. Apskaičiuokite:

a) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) - 2\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 3\,\mathrm{arcctg}(-1) - \frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}(-1)$;

b) $36^{\log_6 5} + 100^{1-\lg 2} - 3^{\log_9 36}$.

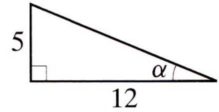
11. Raskite funkcijos apibrėžimo sritį:

a) $f(x) = \sqrt{\lg\frac{1-2x}{x+3}}$; b) $f(x) = \frac{\log_2 x}{\arcsin(x-3)}$.

12. Raskite funkcijos reikšmių sritį:

a) $y = -3\sin\left(\frac{x}{2}\right) + 1$; b) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x + 1$; c) $y = 2\arccos\left(\frac{x}{2}\right)$.

1. Remiantis brėžiniu, $\cos\alpha =$

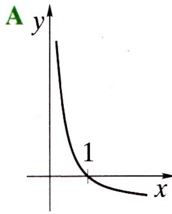


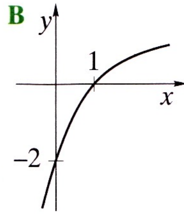
A $\frac{5}{13}$ **B** $\frac{5}{12}$ **C** $\frac{13}{12}$ **D** $\frac{12}{13}$ **E** $\frac{12}{5}$

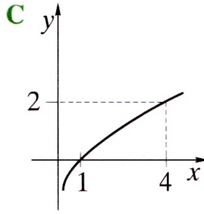
2. Lygties $\lg x = -4$ sprendinys yra:

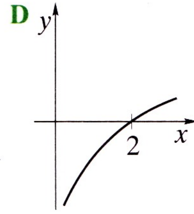
A $\frac{1}{4}$ **B** -40 **C** $10\,000$ **D** $-10\,000$ **E** $\frac{1}{10\,000}$

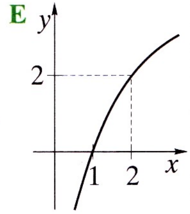
3. Kuris iš grafikų yra funkcijos $y = \log_2 x$ grafikas?

A


B


C


D


E


4. Reiškinio $\log_{\sqrt{5}}(25\sqrt{5})$ reikšmė yra:

A 5 **B** $\sqrt{5}$ **C** $\frac{5}{4}$ **D** 1,5 **E** $\frac{1}{5}$

5. Tiksli $\sin 75^\circ$ reikšmė yra:

A $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ **B** $\frac{\sqrt{6}}{2}$ **C** $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ **D** $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ **E** $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{8}$

6. Išspręskite lygtį:

a) $\lg\sqrt{x-5} + \frac{1}{2}\lg(2x-3) = \lg 30 - 1$; b) $\log_7 x \cdot \log_{27} 49 = 2$; c) $x^{\log_3 x - 4} = \frac{1}{27}$.

7. Išspręskite nelygybę:

a) $\left(\frac{2}{5}\right)^{3x^2-3x+2} > \left(\frac{2}{5}\right)^{3x^2-10}$; b) $4^{\frac{2x}{1-x}} - 16^{\frac{x-6}{2}} \geqslant 0$.

8. Raskite sumą sveikųjų skaičių, kurie nėra nelygybės $36^{x-2} + 6 > 7 \cdot 6^{x-2}$ sprendiniai.

9. a) Raskite lygties $\sin(2x) + \sin^2 x = 0$ sprendinių skaičių intervale $[-2\pi; 2\pi]$.

b) Raskite lygties $\sin^3\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + \cos^3\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2} = -\frac{1}{4}$ sprendinius intervale $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

10. Apskaičiuokite:

a) $\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 2\,\mathrm{arctg}(-\sqrt{3}) + \frac{1}{2}\,\mathrm{arcctg}(-1)$;

b) $\left(81^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\log_9 4} + 25^{\log_{125} 8}\right) \cdot 49^{\log_7 2}$.

11. Raskite funkcijos apibrėžimo sritį:

a) $f(x) = \sqrt{\log_{0,3}\frac{x-1}{x+5}}$; b) $f(x) = \frac{\log_{0,2} x}{\arccos(x-2)}$.

12. Raskite funkcijos reikšmių sritį:

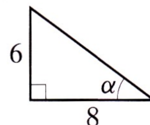
a) $y = 2\cos(3x) + 1$; b) $y = 1 + 3^x$; c) $y = 3\arcsin(2x)$.

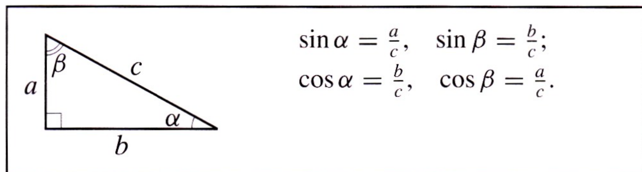
Kartojimas

K17 (5–7)

1. Remiantis brėžiniu, $\sin\alpha =$

A $\frac{3}{4}$ **B** $\frac{3}{5}$ **C** $\frac{4}{5}$ **D** $\frac{5}{4}$ **E** $\frac{4}{3}$





$\sin\alpha = \frac{a}{c}$, $\sin\beta = \frac{b}{c}$;
$\cos\alpha = \frac{b}{c}$, $\cos\beta = \frac{a}{c}$.

$$\sin\alpha = \frac{6}{\sqrt{6^2 + 8^2}} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}.$$

Atsakymas. **B.**

2. Lygties $\lg x = -2$ sprendinys yra:

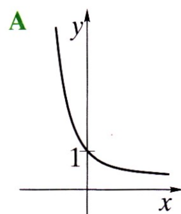
A $\sqrt{10}$ **B** 100 **C** 0,01 **D** $\frac{1}{\sqrt{2}}$ **E** $\frac{1}{2}$

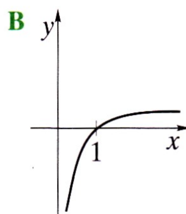
$\log_b a = c$, $b^c = a$ $(a > 0, b > 0, b \neq 1)$;
$\lg a = \log_{10} a$

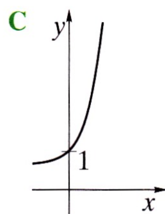
$$\lg x = -2, \quad x = 10^{-2}, \quad x = \frac{1}{10^2}, \quad x = \frac{1}{100}.$$

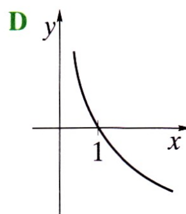
Atsakymas. **C.**

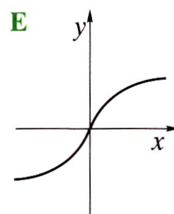
3. Kuris iš grafikų yra funkcijos $y = 5^x$ grafikas?

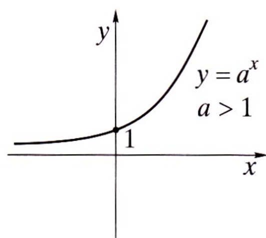
A


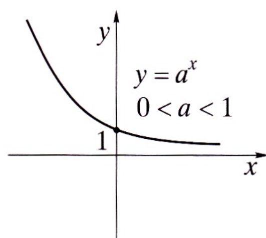
B


C


D


E






Atsakymas. **C.**

4. Reiškinio $\log_{\sqrt{8}}(4\sqrt{2})$ reikšmė yra:

A 2 **B** $\frac{4}{15}$ **C** $\frac{1}{2}$ **D** $\frac{5}{3}$ **E** $\frac{15}{4}$

$\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$, $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$;
$\log_b a^n = n \cdot \log_b a$, $\log_{b^n} a = \frac{1}{n}\log_b a$.

I būdas.

$$\log_{\sqrt{8}}(4\sqrt{2}) = \log_{2^{\frac{3}{2}}}\left(2^2 \cdot 2^{\frac{1}{2}}\right) = \log_{2^{\frac{3}{2}}} 2^{\frac{5}{2}} = \frac{5}{2} \cdot \log_{2^{\frac{3}{2}}} 2 = \frac{5}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \log_2 2 = \frac{5}{3} \cdot 1 = \frac{5}{3}.$$

II būdas.

$$\log_{\sqrt{8}}(4\sqrt{2}) = \log_{8^{\frac{1}{2}}}(4\sqrt{2}) = 2\log_8(4\sqrt{2}) = \log_8(4\sqrt{2})^2 = \log_8(16 \cdot 2) = \log_8 32 =$$
$$= \log_{2^3}\left(2^5\right) = \frac{1}{3} \cdot 5 = \frac{5}{3}.$$

Atsakymas. **D.**

5. Tiksli $\cos 15^\circ$ reikšmė yra:

A $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$ **B** $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2}$ **C** $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ **D** $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ **E** $\frac{\sqrt{6}}{2}$

$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta$

Trigonometrinių funkcijų tikslios reikšmės žinomos, kai $\alpha = 0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ, \ldots$
Pastebėkime, kad $15^\circ = 45^\circ - 30^\circ$ arba $15^\circ = 60^\circ - 45^\circ$.

$\alpha =$	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin\alpha =$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha =$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

$$\cos 15^\circ = \cos(45^\circ - 30^\circ) = \cos 45^\circ \cdot \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \cdot \sin 30^\circ =$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$

Atsakymas. **D.**

6a. Išspręskite lygtį $\frac{1}{2}\lg(x-9) + \lg(\sqrt{2x-1}) = 1$.

Lygties apibrėžimo sritis:

$$\begin{cases} x - 9 > 0, & \text{— pologaritminis reiškinys teigiamas;} \\ 2x - 1 > 0, & \text{— pošaknis neneigiamas, pologaritminis reiškinys teigiamas.} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 9, \\ x > \frac{1}{2}; \end{cases} \Rightarrow x > 9.$$

Sprendžiame lygtį.

I būdas.

$$\frac{1}{2}\lg(x-9)+\lg(2x-1)^{\frac{1}{2}}=1,$$
$$\frac{1}{2}\lg(x-9)+\frac{1}{2}\lg(2x-1)=1 \mid \cdot 2,$$
$$\lg(x-9)+\lg(2x-1)=2,$$
$$\lg\big((x-9)\cdot(2x-1)\big)=2,$$

$$\boxed{\lg a+\lg b=\lg(a\cdot b)}$$

$$(x-9)(2x-1)=10^2,$$
$$2x^2-19x+9-100=0,$$
$$2x^2-19x-91=0, \quad D=361+728=1089=33^2,$$
$$x_1=-3{,}5, \quad x_2=13;$$
$$-3{,}5<9 \text{ (netinka)}, \quad 13>9 \text{ — tinka.}$$

II būdas.

$$\frac{1}{2}\lg(x-9)+\lg\sqrt{2x-1}=1, \quad \lg(x-9)^{\frac{1}{2}}+\lg\sqrt{2x-1}=1,$$
$$\lg\sqrt{x-9}+\lg\sqrt{2x-1}=1, \quad \lg\left(\sqrt{x-9}\cdot\sqrt{2x-1}\right)=1,$$
$$\lg\sqrt{(x-9)(2x-1)}=\lg 10, \quad \sqrt{(x-9)(2x-1)}=10 \mid \uparrow^2,$$
$$(x-9)(2x-1)=100.$$

Ši lygtis išspręsta I-ame būde. Gauname,

$$x_1=-3{,}5, \quad x_2=13.$$

Pasitikriname:
kai $x=13$, tai

$$\frac{1}{2}\lg(13-9)+\lg\sqrt{2\cdot 13-1}=\frac{1}{2}\lg 4+\lg 5=$$
$$=\lg\sqrt{4}+\lg 5=\lg 2+\lg 5=\lg(2\cdot 5)=\lg 10=1 \text{ — lygybė teisinga.}$$

Atsakymas. 13.

6b. Išspręskite lygtį $\log_5 x\cdot\log_{16}25=1$.

$$\boxed{\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}; \quad \log_a b=\frac{1}{\log_b a}}$$

Vienodinkime logaritmų pagrindus.

I būdas.

$$\log_5 x \cdot \log_{4^2} 5^2 = 1, \quad \log_5 x \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \log_4 5 = 1,$$

$$\log_5 x \cdot \log_4 5 = 1, \quad \log_5 x \cdot \frac{\log_5 5}{\log_5 4} = 1,$$

$$\log_5 x \cdot \frac{1}{\log_5 4} = 1, \quad \log_5 x = \log_5 4,$$

$$x = 4.$$

II būdas.

$$\log_5 x \cdot \frac{1}{\log_{25} 16} = 1, \quad \log_5 x = \log_{25} 16, \quad \log_5 x = \log_{5^2} 16,$$

$$\log_5 x = \frac{1}{2} \log_5 16, \quad \log_5 x = \log_5 \sqrt{16}, \quad \log_5 x = \log_5 4,$$

$$x = 4.$$

Pasitikrinę, ar 4 yra lygties apibrėžimo srities ($x > 0$) skaičius, rašome atsakymą.

Atsakymas. 4.

6c. Išspręskite lygtį $x^{\log_2 x + 2} = 8$.

Abi lygties puses logaritmuokime pagrindu 2.

$$\log_2 \left(x^{\log_2 x + 2}\right) = \log_2 8,$$

$$\left(\log_2 x + 2\right) \cdot \log_2 x = 3.$$

$\log_a b^n = n \cdot \log_a b$

Pažymėkime $\log_2 x = y$:

$$(y + 2) \cdot y = 3, \quad y^2 + 2y - 3 = 0, \quad D = 16,$$

$$y_1 = -3, \quad y_2 = 1.$$

Grįžtame prie pažymėjimo:

$$\log_2 x = -3, \quad x = 2^{-3}, \quad x = \frac{1}{8};$$

$$\log_2 x = 1, \quad x = 2^1, \quad x = 2.$$

Patikrinę gautąsias x reikšmes, rašome atsakymą.

Atsakymas. $\frac{1}{8}$; 2.

7a. Išspręskite nelygybę $\left(\frac{1}{10}\right)^{4x^2-2x-2} < \left(\frac{1}{10}\right)^{4x^2-8}$.

$a^{f(x)} < a^{g(x)} \Rightarrow f(x) < g(x)$, kai $a > 1$;
$a^{f(x)} < a^{g(x)} \Rightarrow f(x) > g(x)$, kai $0 < a < 1$;
$a^{f(x)} > a^{g(x)} \Rightarrow f(x) > g(x)$, kai $a > 1$;
$a^{f(x)} > a^{g(x)} \Rightarrow f(x) < g(x)$, kai $0 < a < 1$.

Kadangi $\frac{1}{10} < 1$, tai duotoji nelygybė ekvivalenti nelygybei:

$$4x^2 - 2x - 2 > 4x^2 - 8, \quad -2x > -6, \quad x < 3.$$

Atsakymas. $x \in (-\infty; 3)$.

7b. Išspręskite nelygybę $3^{\frac{-5x}{x-1}} - 9^{\frac{x-12}{2}} \leqslant 0$.

$$3^{\frac{-5x}{x-1}} \leqslant 9^{\frac{x-12}{2}}, \quad 3^{\frac{-5x}{x-1}} \leqslant \left(3^2\right)^{\frac{x-12}{2}},$$

$$3^{\frac{-5x}{x-1}} \leqslant 3^{2\cdot\frac{x-12}{2}},$$

$$\boxed{\left(a^m\right)^n = a^{m\cdot n}}$$

$$3^{\frac{-5x}{x-1}} \leqslant 3^{x-12}.$$

Kadangi $3 > 1$, tai:

$$\frac{-5x}{x-1} \leqslant x - 12, \quad \frac{-5x}{x-1} - x + 12 \leqslant 0,$$

$$\frac{-5x - x(x-1) + 12(x-1)}{x-1} \leqslant 0, \quad \frac{-5x - x^2 + x + 12x - 12}{x-1} \leqslant 0,$$

$$\frac{-x^2 + 8x - 12}{x-1} \leqslant 0, \quad -\frac{x^2 - 8x + 12}{x-1} \leqslant 0,$$

$$\frac{x^2 - 8x + 12}{x-1} \geqslant 0.$$

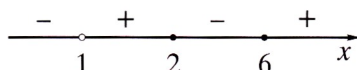
Skaitiklį skaidome dauginamaisiais:

$$x^2 - 8x + 12 = 0, \quad D = 16, \quad x_1 = 2, \quad x_2 = 6,$$

$$x^2 - 8x + 12 = (x-2)(x-6).$$

Gauname nelygybę:

$$\frac{(x-2)(x-6)}{x-1} \geqslant 0.$$



Atsakymas. $x \in (1; 2] \cup [6; +\infty)$.

8. Raskite sumą sveikųjų skaičių, kurie nėra nelygybės $4^{x-3} + 2 > 3 \cdot 2^{x-3}$ sprendiniai.

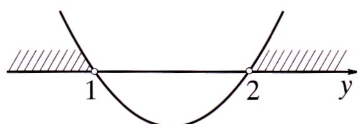
Sprendžiame nelygybę:

$$4^{x-3} + 2 > 3 \cdot 2^{x-3}, \quad \left(2^2\right)^{x-3} + 2 > 3 \cdot 2^{x-3}, \quad \left(2^{x-3}\right)^2 + 2 > 3 \cdot 2^{x-3}.$$

Pažymėkime $2^{x-3} = y$:

$$y^2 + 2 > 3 \cdot y, \quad y^2 - 3y + 2 > 0,$$

$$(y-1)(y-2) > 0.$$



Nelygybės $y^2 - 3y + 2 > 0$ sprendiniai yra

$$y < 1 \quad \text{ir} \quad y > 2.$$

Grįžtame prie x:

$$2^{x-3} < 1 \quad \text{ir} \quad 2^{x-3} > 2.$$

Sprendžiame šias nelygybes:

$$\begin{aligned} &2^{x-3} < 1, && 2^{x-3} > 2,\\ &2^{x-3} < 2^0, && 2^{x-3} > 2^1,\\ &x - 3 < 0, && x - 3 > 1,\\ &x < 3; && x > 4. \end{aligned}$$

Duotosios nelygybės sprendiniai: $x \in (-\infty; 3) \cup (4; +\infty)$.
Sveikieji skaičiai, kurie nėra nelygybės sprendiniai, yra du: 3 ir 4. Jų suma $3 + 4 = 7$.

Atsakymas. 7.

9a. Raskite lygties $\sin(2x) + 2\cos^2 x = 0$ sprendinių skaičių intervale $[-2\pi; 2\pi]$.

Sprendžiame lygtį:

$$\sin(2x) + 2\cos^2 x = 0, \quad x \in [-2\pi; 2\pi].$$

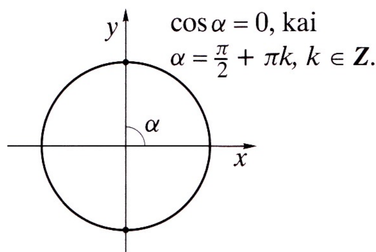
Pertvarkome lygtį:

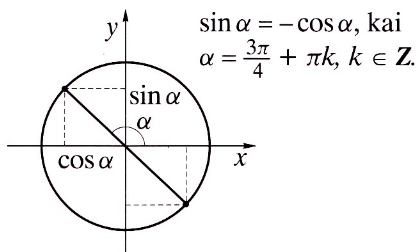
$$2\sin x \cos x + 2\cos^2 x = 0,$$

$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$

$$\sin x \cos x + \cos^2 x = 0,$$
$$\cos x(\sin x + \cos x) = 0.$$

Toliau šią lygtį galima spręsti taip.
I būdas. Sandauga lygi 0, kai $\cos x = 0$ arba $\sin x + \cos x = 0$.
Lygčių sprendinių skaičių raskime remdamiesi sinuso ir kosinuso apibrėžimais.





Lygtis $\cos x = 0$ intervale $[0; 2\pi]$ turi 2 sprendinius, vadinasi, intervale $[-2\pi; 2\pi]$ yra 4 sprendiniai:
$\left(-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$.

Lygtis $\sin x = -\cos x$ intervale $[0; 2\pi]$ turi 2 sprendinius, o intervale $[-2\pi; 2\pi]$ — 4 sprendinius:
$\left(-\frac{5\pi}{4}; -\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right)$.

II būdas. Lygčių sprendinių skaičių raskime algebriškai.

$\cos x = 0,$
$x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbf{Z},$
$-2\pi \leqslant \frac{\pi}{2} + \pi k \leqslant 2\pi,$
$-2\pi - \frac{\pi}{2} \leqslant \pi k \leqslant 2\pi - \frac{\pi}{2},$
$-\frac{5\pi}{2} \leqslant \pi k \leqslant \frac{3\pi}{2},$
$-\frac{5}{2} \leqslant k \leqslant \frac{3}{2}.$

Šią dvigubąją nelygybę tenkina keturios sveikosios k reikšmės: -2; -1; 0; 1.
Vadinasi, 4 sprendiniai.

$\sin x + \cos x = 0 \mid : \cos x \neq 0,$
$\operatorname{tg} x = -1,$
$x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbf{Z},$
$-2\pi \leqslant -\frac{\pi}{4} + \pi k \leqslant 2\pi,$
$-\frac{7\pi}{4} \leqslant \pi k \leqslant \frac{9\pi}{4},$
$-\frac{7}{4} \leqslant k \leqslant \frac{9}{4}.$

Šią nelygybę tenkina keturios k reikšmės: -1; 0; 1; 2.
Vadinasi, 4 sprendiniai.

Prieš rašydami atsakymą pasitikriname, ar tarp sprendinių nėra lygių.

Atsakymas. 8 sprendiniai.

9b. Raskite lygties $\cos^3 \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2} - \sin^3 \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = \frac{1}{4}$ sprendinius intervale $\left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

Pertvarkome lygtį:

$\cos \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2}\left(\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}\right) = \frac{1}{4},$

$2 \cos \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2} \cdot \cos x = \frac{1}{2},$

$2 \sin x \cos x = 1,$

$\sin(2x) = 1,$

$2x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbf{Z},$

$x = \frac{\pi}{4} + \pi k.$

$-\frac{3\pi}{2} \leqslant \frac{\pi}{4} + \pi k \leqslant \frac{3\pi}{2},$

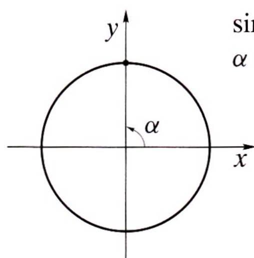
$-\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \leqslant \pi k \leqslant \frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{4},$

$-\frac{7\pi}{4} \leqslant \pi k \leqslant \frac{5\pi}{4},$

$-\frac{7}{4} \leqslant k \leqslant \frac{5}{4}.$

$\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos(2\alpha)$

$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$



$\sin \alpha = 1,$
$\alpha = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbf{Z}.$

Šią dvigubąją nelygybę tenkina šios sveikosios k reikšmės: -1; 0; 1.
Kai $k = -1$, tai $x = \frac{\pi}{4} + \pi \cdot (-1) = -\frac{3\pi}{4}$;
kai $k = 0$, tai $x = \frac{\pi}{4} + \pi \cdot 0 = \frac{\pi}{4}$;
kai $k = 1$, tai $x = \frac{\pi}{4} + \pi \cdot 1 = \frac{5\pi}{4}$.

Atsakymas. $-\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}.$

10a. Apskaičiuokite $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) - 2\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 3\,\mathrm{arcctg}(-1) - \frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}(-1)$.

$\arcsin a = b$, kai $\sin b = a$ ir $b \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$;	$\arcsin(-a) = -\arcsin a$;
$\arccos a = b$, kai $\cos b = a$ ir $b \in [0; \pi]$;	$\arccos(-a) = \pi - \arccos a$;
$\mathrm{arctg}\, a = b$, kai $\mathrm{tg}\, b = a$ ir $b \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$;	$\mathrm{arctg}(-a) = -\mathrm{arctg}\, a$;
$\mathrm{arcctg}\, a = b$, kai $\mathrm{ctg}\, b = a$ ir $b \in (0; \pi)$.	$\mathrm{arcctg}(-a) = \pi - \mathrm{arcctg}\, a$.

$$\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) - 2\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 3\,\mathrm{arcctg}(-1) - \frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}(-1) =$$

$$= -\arcsin\frac{1}{2} - 2\left(\pi - \arccos\frac{1}{2}\right) + 3(\pi - \mathrm{arcctg}\, 1) + \frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\, 1 =$$

$\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$, $\arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$, $\mathrm{arcctg}\, 1 = \frac{\pi}{4}$, $\mathrm{arctg}\, 1 = \frac{\pi}{4}$

$$= -\frac{\pi}{6} - 2\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + 3\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{6} - \frac{4\pi}{3} + \frac{9\pi}{4} + \frac{\pi}{8} = \frac{7\pi}{8}.$$

Atsakymas. $\frac{7\pi}{8}$.

10b. Apskaičiuokite $36^{\log_6 5} + 100^{1-\lg 2} - 3^{\log_9 36}$.

$a^{\log_a b} = b$, $\log_{a^n} b^m = \frac{1}{n}\cdot m\cdot\log_a b$,
$a^{m-n} = \frac{a^m}{a^n}$, $(a^m)^n = a^{m\cdot n}$.

$$36^{\log_6 5} + 100^{1-\lg 2} - 3^{\log_9 36} = \left(6^2\right)^{\log_6 5} + \frac{100^1}{100^{\lg 2}} - 3^{\log_{3^2} 6^2} =$$

$$= 6^{2\cdot\log_6 5} + \frac{100}{(10^2)^{\lg 2}} - 3^{\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\log_3 6} = 6^{\log_6 5^2} + \frac{100}{10^{2\cdot\lg 2}} - 3^{\log_3 6} =$$

$$= 5^2 + \frac{100}{10^{\lg 2^2}} - 6 = 25 + \frac{100}{4} - 6 = 25 + 25 - 6 = 44.$$

Atsakymas. 44.

11a. Raskite funkcijos $f(x) = \sqrt{\lg\frac{1-2x}{x+3}}$ apibrėžimo sritį.

Pošaknis turi būti neneigiamas:

$$\lg\frac{1-2x}{x+3} \geqslant 0. \qquad (1)$$

Pologaritminis reiškinys turi būti teigiamas:

$$\frac{1-2x}{x+3} > 0. \qquad (2)$$

Vardiklis negali būti lygus 0:

$$x + 3 \neq 0. \qquad (3)$$

(3) sąlyga įeina ir į (2) nelygybę.
Todėl reikia rasti sprendinius sistemos

$$\begin{cases} \lg \frac{1-2x}{x+3} \geqslant 0, \\ \frac{1-2x}{x+3} > 0. \end{cases}$$

Sprendžiame pirmąją sistemos nelygybę:

$$\begin{cases} \lg \frac{1-2x}{x+3} \geqslant \lg 1, \\ \frac{1-2x}{x+3} > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{1-2x}{x+3} \geqslant 1, \quad (\text{nes } 10 > 1) \\ \frac{1-2x}{x+3} > 0. \end{cases}$$

Pakanka rasti nelygybės $\frac{1-2x}{x+3} \geqslant 1$ sprendinius.

$$\frac{1-2x}{x+3} - 1 \geqslant 0, \quad \frac{1-2x-x-3}{x+3} \geqslant 0, \quad \frac{-2-3x}{x+3} \geqslant 0, \quad -\frac{3x+2}{x+3} \geqslant 0,$$

$$\frac{3x+2}{x+3} \leqslant 0,$$

+ − +
−3 $-\frac{2}{3}$ x

$$x \in \left(-3; -\frac{2}{3}\right].$$

Atsakymas. $x \in \left(-3; -\frac{2}{3}\right]$.

11b. Raskite funkcijos $f(x) = \frac{\log_2 x}{\arcsin(x-3)}$ abiprėžimo sritį.

$$\begin{cases} x > 0, \\ -1 \leqslant x - 3 \leqslant 1, \\ \arcsin(x-3) \neq 0; \end{cases}$$

$\log_b a$, $a > 0$, $b > 0$, $b \neq 1$;
$\arcsin a$, $-1 \leqslant a \leqslant 1$;
$\frac{a}{b}$, $b \neq 0$.

$$\begin{cases} x > 0, \\ 2 \leqslant x \leqslant 4, \\ \arcsin(x-3) \neq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 2 \leqslant x \leqslant 4, \\ \arcsin(x-3) \neq 0. \end{cases}$$

Iš intervalo $x \in [2; 4]$ reikia išmesti tas reikšmes, su kuriomis $\arcsin(x-3) = 0$. Akivaizdu, kad tik su reikšme $x = 3$

$$\arcsin(3-3) = \arcsin 0 = 0.$$

Vadinasi, funkcijos apibrėžimo sritis $x \in [2; 3) \cup (3; 4]$.

Atsakymas. $x \in [2; 3) \cup (3; 4]$.

12a. Raskite funkcijos $y = -3\sin\left(\frac{x}{2}\right) + 1$ reikšmių sritį.

$-1 \leqslant \sin\alpha \leqslant 1$

$\sin\frac{x}{2}$ reikšmės yra ne mažesnės už -1 ir ne didesnės už 1, t. y. $-1 \leqslant \sin\frac{x}{2} \leqslant 1$.

$-3\sin\frac{x}{2}$ reikšmes gausime gautąją nelygybę padauginę iš -3 (nelygybės ženklai keisis):

$$-1 \leqslant \sin\frac{x}{2} \leqslant 1 \;\Big|\cdot(-3), \quad 3 \geqslant -3\sin\frac{x}{2} \geqslant -3, \quad -3 \leqslant -3\sin\frac{x}{2} \leqslant 3.$$

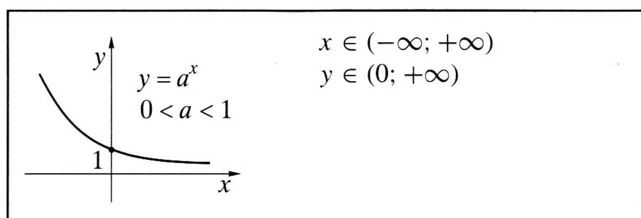
$-3\sin\frac{x}{2}+1$ reikšmes gausime prie gautosios nelygybės pridėję 1:

$$-3 \leqslant -3\sin\frac{x}{2} \leqslant 3 \;\Big| +1,$$

$$-3+1 \leqslant -3\sin\frac{x}{2}+1 \leqslant 3+1, \quad -2 \leqslant -3\sin\frac{x}{2}+1 \leqslant 4.$$

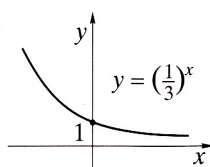
Vadinasi, funkcija gali įgyti reikšmes $y \in [-2; 4]$. *Atsakymas.* $y \in [-2; 4]$.

12b. Raskite funkcijos reikšmių sritį $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x + 1$.



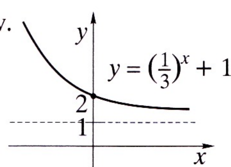
Nubraižykime funkcijos $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ grafiko eskizą (1 pav.).

1 pav.



Reikšmių sritis
$y \in (0; \infty)$

2 pav.



Reikšmių sritis
$y \in (1; \infty)$

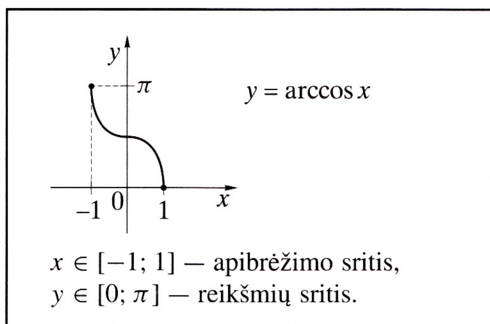
Funkcijos $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x + 1$ grafiką gausime iš funkcijos $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ grafiko, pastūmę jį per 1 vienetą aukštyn (žr. 2 pav.).

Atsakymas. $y \in (1; +\infty)$.

12c. Raskite funkcijos $y = 2\arccos\left(\frac{x}{2}\right)$ reikšmių sritį.

$$0 \leqslant \arccos\left(\frac{x}{2}\right) \leqslant \pi,$$

$$0 \leqslant 2\arccos\left(\frac{x}{2}\right) \leqslant 2\pi.$$



Atsakymas. $y \in [0; 2\pi]$.

Kartojimas

K18 (8–10)

1. Aritmetinės progresijos skirtumas $d = -0{,}4$, o dvyliktasis narys $a_{12} = 2{,}4$. Tada $a_1 =$

A $-1{,}8$ **B** 4 **C** $6{,}8$ **D** $8{,}6$ **E** $-4{,}6$

2. Per funkcijos $f(x) = x^3 + 27$ grafiko ir abscisių ašies susikirtimo tašką nubrėžta liestinė su teigiamąja abscisių ašies (Ox) kryptimi sudaro kampą, kurio tangentas lygus:

A 3 **B** $\frac{1}{27}$ **C** -1 **D** 27 **E** -9

3. Geometrinės progresijos pirmasis narys $b_1 = -\frac{2}{27}$, o vardiklis $q = 3$. Tada $b_8 =$

A $\frac{1}{27}$ **B** $\frac{64}{9}$ **C** -162 **D** -16 **E** -81

4. Kai $f(x) = 5\sqrt{4x+1} + 3\sin 4$, tai $f'(2) =$

A 3 **B** $3\frac{1}{3}$ **C** 15 **D** $\frac{5}{6}$ **E** 30

5. a) Geometrinės progresijos trečiasis narys lygus 3, o $S_6 - S_5 = 81$. Apskaičiuokite šios progresijos vardiklį.

b) Iš teigiamų skaičių sudarytos aritmetinės progresijos antrojo ir ketvirtojo narių kvadratų suma lygi 274, o trečiojo ir penktojo narių suma lygi 30. Kelių pirmųjų šios progresijos narių suma lygi 105?

c) Keturi teigiami skaičiai sudaro aritmetinę progresiją. Jei prie trečiojo skaičiaus pridėtume 4, o prie ketvirtojo pridėtume 16, tai gautieji keturi skaičiai sudarytų geometrinę progresiją. Apskaičiuokite šeštąjį aritmetinės progresijos narį.

6. a) Apskaičiuokite sumą visų lyginių natūraliųjų skaičių, mažesnių už 90.

b) Apskaičiuokite nelygybės $0{,}3^{2\cdot 1+2\cdot 2+2\cdot 3+\dots+2\cdot x} > 0{,}3^{72}$, $x \in \boldsymbol{N}$, natūraliųjų sprendinių, ne mažesnių už 4, sumą.

c) Išspręskite lygtį $\frac{1}{x} + x + x^2 + \dots + x^n + \dots = \frac{7}{2}$, jei $0 < x < 1$.

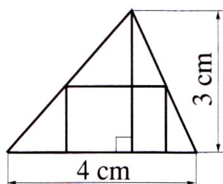
7. a) Raskite funkcijos $f(x) = 2e^x(x^3 + 2x^2)$ reikšmių didėjimo ir reikšmių mažėjimo intervalus.

b) Funkcijos $f(x) = -x^2 + px + q$ grafikas eina per taškus $A(-2; 5)$ ir $B(2; -3)$.
1) Raskite p ir q reikšmes.
2) Raskite funkcijos kritinius taškus.
3) Raskite didžiausią funkcijos reikšmę intervale $x \in [-6; 5]$.

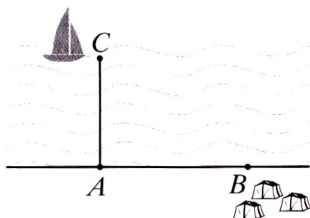
c) Funkcijos $f(x) = a\ln(2-3x)$ grafiko liestinė taške, kurio abscisė $x_0 = -1$, pasvirusi į abscisių ašį 60° kampu.
1) Raskite funkcijos apibrėžimo sritį.
2) Raskite parametro a reikšmę.
3) Raskite funkcijos grafiko ir liestinės lietimosi taško koordinatę y.
4) Parodykite, kad liestinės lygtis yra $y = -\frac{5\sqrt{3}}{3}\ln 5 + \sqrt{3}(x+1)$.

8. Duotos funkcijos $f(x) = \sqrt{3} - 5x + 2{,}5\cos(\pi - 2x)$ ir $g(x) = -0{,}2\,\mathrm{tg}(5x + 10)$.
1) Raskite $f'(x)$ ir $g'(x)$.
2) Apskaičiuokite $g'(-2)$.
3) Išspręskite lygtį $f'(x) + 2\cos^2(2x) = g'(-2)$.

9. a) Į trikampį įbrėžtas stačiakampis taip, kad viena jo kraštinė yra trikampio kraštinės dalis ir visos viršūnės yra trikampio kraštinėse. Ar gali šio stačiakampio plotas būti didesnis negu $3\,\text{cm}^2$? Atsakymą pagrįskite.



b) Valtis C nuo artimiausio kranto taško A nutolusi 3 km atstumu. Valtimi plaukia poilsiautojas į stovyklavietę B, kuri yra ant kranto ir nuo taško A nutolusi 5 km. Poilsiautojas valtimi iriasi 4 km/h greičiu, o išlipęs į krantą per valandą nueina 5 km. Į kokį kranto tašką turi plaukti valtis, kad poilsiautojas patektų į stovyklavietę per trumpiausią laiką?



Kartojimas

K18 (8–10)

1. Aritmetinės progresijos pirmasis narys $a_1 = -40$, o skirtumas $d = -6$. Tada $a_{26} =$

A -46 B -110 C -190 D 110 E 96

2. Per funkcijos $f(x) = -x^3 - 8$ grafiko ir abscisių ašies susikirtimo tašką nubrėžta liestinė su teigiamąja abscisių ašies (Ox) kryptimi sudaro kampą, kurio tangentas lygus:

A 12 B -12 C -48 D 8 E 1

3. Geometrinės progresijos pirmasis narys $b_1 = 24$, o vardiklis $q = \frac{1}{2}$. Tada $b_7 =$

A $\frac{8}{3}$ B $1{,}6$ C $\frac{3}{8}$ D $1\frac{1}{4}$ E 12

4. Kai $f(x) = 3\sqrt{4x+1} + 5\cos 2$, tai $f'(0) =$

A 6 B 16 C $1\frac{3}{4}$ D 3 E 7

5. a) Geometrinės progresijos antrasis narys lygus 2, o $S_5 - S_4 = 16$. Apskaičiuokite šios progresijos vardiklį.

b) Iš teigiamų skaičių sudarytos geometrinės progresijos antrojo ir ketvirtojo narių kvadratų suma lygi 68, o trečiojo ir penktojo narių sandauga lygi 64. Kelių pirmųjų šios progresijos narių suma lygi 127?

c) Trys teigiami skaičiai, kurių trečiasis lygus 12, sudaro geometrinę progresiją. Jei vietoj 12 paimtume 9, tai šie trys skaičiai sudarytų aritmetinę progresiją. Apskaičiuokite šeštąjį didėjančios geometrinės progresijos narį.

6. a) Apskaičiuokite sumą visų nelyginių natūraliųjų skaičių, mažesnių už 80.

b) Apskaičiuokite nelygybės $5^{2\cdot 1+2\cdot 2+\cdots+2\cdot x} < (0{,}04)^{-28}$, $x \in N$, natūraliųjų sprendinių, ne mažesnių už 3, sumą.

c) Išspręskite lygtį $2x + 1 + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \cdots = \frac{13}{6}$, kai $0 < x < 1$.

7. a) Raskite funkcijos $f(x) = 3\,\mathrm{e}^x\left(x^3 - \frac{4}{3}x^2\right)$ reikšmių didėjimo ir reikšmių mažėjimo intervalus.

b) Funkcijos $f(x) = x^2 + px + q$ grafikas eina per taškus $A(-2; 0)$ ir $B(1; 3)$.

1) Raskite p ir q reikšmes.
2) Raskite funkcijos kritinius taškus.
3) Raskite mažiausią funkcijos reikšmę intervale $x \in [-10; 10]$.

c) Funkcijos $f(x) = a\ln(3x-1)$ grafiko liestinė taške, kurio abscisė $x_0 = 2$, pasvirusi į abscisių ašį 45° kampu.

1) Raskite funkcijos apibrėžimo sritį.
2) Raskite parametro a reikšmę.
3) Raskite funkcijos grafiko ir liestinės lietimosi taško koordinatę y.
4) Parodykite, kad liestinės lygtis yra $y = x - 2 + \frac{5}{3}\ln 5$.

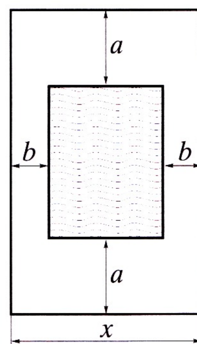
8. Duota funkcija $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{8}\sin(\pi - 2x) - \frac{\sqrt{3}}{4}x + \frac{\sqrt{3}}{4}\cos(\pi + x) + \frac{\sqrt{3}}{4}$.

1) Raskite $f'(x)$.
2) Apskaičiuokite $f(0)$ ir $f'(\pi)$.
3) Išspręskite lygtį $f'(x) + f'(\pi) = f(0)$.

9. a) Knygos puslapio plotas yra $S\,\text{cm}^2$. Pagal technines sąlygas viršuje ir apačioje teksto puslapio pakraščių plotis turi būti lygus a cm, o iš kairės ir dešinės — b cm.

1) Knygos puslapio plotį pažymėkite x. Parodykite, kad teksto užimamas plotas

$$Q(x) = S + 4ab - \left(\frac{2bS}{x} + 2ax\right)\text{cm}^2.$$



2) Raskite funkcijos $Q(x)$ išraišką, kai $S = 231{,}2$, $a = 13{,}6$ ir $b = 17$.

3) Koks turi būti puslapio matmenų santykis, kad puslapyje teksto užimamas plotas būtų didžiausias?

b) Atviras plaukimo baseinas yra stačiakampio gretasienio, kurio pagrindas yra kvadratas, formos. Baseino tūris lygus $32\,\text{m}^3$. Raskite baseino matmenis, jeigu žinoma, kad jo dugno ir sienų apdailai buvo sunaudota mažiausiai plytelių.

1. Aritmetinės progresijos skirtumas $d = -0{,}4$, o dvyliktasis narys $a_{12} = 2{,}4$. Tada $a_1 =$

A $-1{,}8$ **B** 4 **C** 6,8 **D** 8,6 **E** $-4{,}6$

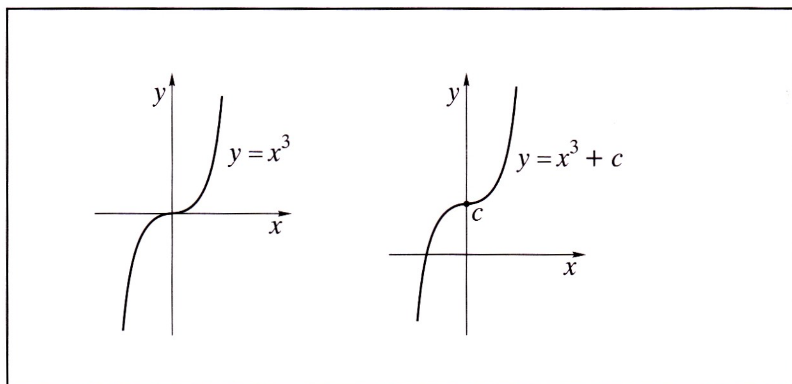
Seka (a_n), kurios gretimų narių a_n ir a_{n-1} $(n \geqslant 2)$ skirtumai $a_n - a_{n-1}$ yra lygūs, vadinama aritmetine progresija.
a_1 — pirmasis narys,
a_n — n-tasis narys,
$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \cdots = a_n - a_{n-1} = d$ — skirtumas,
$a_n = a_{n-1} + d$,
$a_n = a_1 + d(n-1)$ — n-tojo nario formulė,
$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$ — pirmųjų n narių suma.

$$a_{12} = a_1 + d(12-1), \quad a_{12} = a_1 + 11d, \quad 2{,}4 = a_1 + 11 \cdot (-0{,}4),$$
$$a_1 = 2{,}4 + 4{,}4, \quad a_1 = 6{,}8.$$

Atsakymas. **C**.

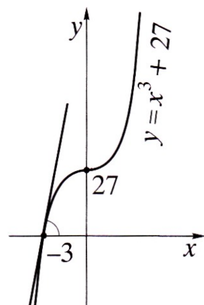
2. Per funkcijos $f(x) = x^3 + 27$ grafiko ir abscisių ašies susikirtimo tašką nubrėžta liestinė su teigiamąja abscisių ašies (Ox) kryptimi sudaro kampą, kurio tangentas lygus:

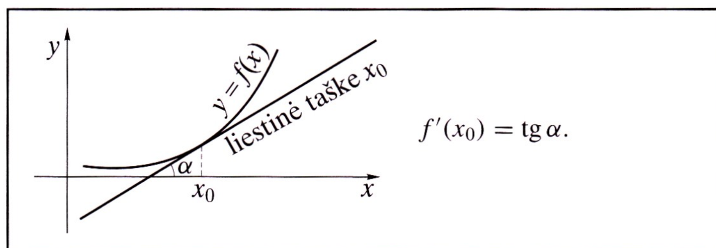
A 3 **B** $\frac{1}{27}$ **C** -1 **D** 27 **E** -9



$y = x^3 + 27$ ir abscisių ašis (Ox ašis — tiesė $y = 0$) kertasi taške:

$$x^3 + 27 = 0, \quad x^3 = -27, \quad x = -3.$$





Funkcijos išvestinės reikšmė taške x_0 lygi tangentui kampo, kurį sudaro per tą tašką nubrėžta funkcijos grafiko liestinė su teigiamąja abscisių ašies kryptimi.
Randame $f(x)$ išvestinę:

$$f'(x) = \left(x^3 + 27\right)' = 3x^2.$$

Apskaičiuojame išvestinės reikšmę taške $x = -3$:

$$f'(-3) = 3 \cdot (-3)^2 = 27.$$

Vadinasi, funkcijos $f(x) = x^3 + 27$ grafiko liestinė, einanti per tašką, kurio $x = -3$, su Ox ašimi sudaro kampą, kurio tangentas lygus 27.

Atsakymas. **D**.

3. Geometrinės progresijos pirmasis narys $b_1 = -\frac{2}{27}$, o vardiklis $q = 3$. Tada $b_8 =$

A $\frac{1}{27}$ **B** $\frac{64}{9}$ **C** -162 **D** -16 **E** -81

Seka (b_n), kurios gretimų narių b_n ir b_{n-1} $(n \geqslant 2)$ santykiai $\frac{b_n}{b_{n-1}}$ yra lygūs, vadinama geometrine progresija.
b_1 — pirmasis narys,
b_n — n-tasis narys,
$\frac{b_2}{b_1} = \frac{b_3}{b_2} = \cdots = \frac{b_n}{b_{n-1}} = q$ — vardiklis,
$b_n = b_{n-1} \cdot q$,
$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$ — n-tojo nario formulė.

$$b_8 = b_1 \cdot q^{8-1}, \quad b_8 = b_1 \cdot q^7,$$
$$b_8 = -\frac{2}{27} \cdot 3^7, \quad b_8 = -2 \cdot 3^4, \quad b_8 = -162.$$

Atsakymas. **C**.

4. Kai $f(x) = 5\sqrt{4x+1} + 3\sin 4$, tai $f'(2) =$

A 3 **B** $3\frac{1}{3}$ **C** 15 **D** $\frac{5}{6}$ **E** 30

$$\left(\sqrt{f(x)}\right)' = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$$

Randame $f(x)$ išvestinę:

$$f'(x) = \left(5\sqrt{4x+1} + 3\sin 4\right)' = \left(5\sqrt{4x+1}\right)' + (3\sin 4)' =$$
$$= \frac{5 \cdot (4x+1)'}{2\sqrt{4x+1}} + 0 = \frac{5 \cdot 4}{2\sqrt{4x+1}} = \frac{10}{\sqrt{4x+1}}.$$

Apskaičiuojame $f'(2)$:

$$f'(2) = \frac{10}{\sqrt{4 \cdot 2 + 1}} = \frac{10}{\sqrt{9}} = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}.$$

Atsakymas. **B**.

5a. Geometrinės progresijos trečiasis narys lygus 3, o $S_6 - S_5 = 81$. Apskaičiuokite šios progresijos vardiklį.

S_6 žymi pirmųjų šešių narių sumą, S_5 žymi pirmųjų penkių narių sumą.
Vadinasi, skirtumas $S_6 - S_5$ yra lygus 6-tajam progresijos nariui:

$$S_6 - S_5 = 81 = b_6.$$

Išreikškime narius b_6 ir b_3 per pirmąjį narį b_1 ir vardiklį q:

$$\begin{cases} b_6 = b_1 \cdot q^5, \\ b_3 = b_1 \cdot q^2; \end{cases} \quad \begin{cases} 81 = b_1 \cdot q^5, \\ 3 = b_1 \cdot q^2. \end{cases}$$

Pirmąją sistemos lygtį padalykime iš antrosios:

$$\frac{81}{3} = \frac{b_1 q^5}{b_1 q^2}, \quad 27 = q^3, \quad q = \sqrt[3]{27}, \quad q = 3.$$

Atsakymas. 3.

5b. Iš teigiamų skaičių sudarytos aritmetinės progresijos antrojo ir ketvirtojo narių kvadratų suma lygi 274, o trečiojo ir penktojo narių suma lygi 30. Kelių pirmųjų šios progresijos narių suma lygi 105?

$$\begin{cases} a_2^2 + a_4^2 = 274 \text{ — antrojo ir ketvirtojo narių kvadratų suma,} \\ a_3 + a_5 = 30 \text{ — trečiojo ir penktojo narių suma,} \end{cases}$$

$105 = a_1 + \cdots + a_n = S_n$ — pirmųjų n narių suma (reikia rasti n).

$$a_2 = a_1 + d, \quad a_3 = a_1 + 2d, \quad a_4 = a_1 + 3d, \quad a_5 = a_1 + 4d.$$

$S_n = \frac{a_1+a_n}{2} \cdot n = \frac{a_1+a_1+d(n-1)}{2} \cdot n = \frac{2a_1+d(n-1)}{2} \cdot n,$ $a_n = a_1 + d(n-1)$

$$\begin{cases} (a_1 + d)^2 + (a_1 + 3d)^2 = 274, \\ (a_1 + 2d) + (a_1 + 4d) = 30. \end{cases}$$

Iš antros lygties išsireikškime a_1 ir tą išraišką statykime į pirmąją lygtį:

$$a_1 + 2d + a_1 + 4d = 30, \quad 2a_1 + 6d = 30, \quad a_1 + 3d = 15, \quad a_1 = 15 - 3d.$$

$$(a_1 + d)^2 + (a_1 + 3d)^2 = 274,$$

$$(15 - 3d + d)^2 + (15 - 3d + 3d)^2 = 274,$$

$$(15 - 2d)^2 + 15^2 = 274,$$

$$(15 - 2d)^2 = 274 - 225,$$

$$(15 - 2d)^2 = 49;$$

$$15 - 2d = -7, \quad \text{arba} \quad 15 - 2d = 7,$$

$$2d = 22, \qquad 2d = 8,$$

$$d = 11; \qquad d = 4.$$

Kai $d = 11$, tai

$$a_1 = 15 - 3 \cdot 11 = -18 \text{ (netinka pagal sąlygą).}$$

Kai $d = 4$, tai

$$a_1 = 15 - 3 \cdot 4 = 3.$$

Taigi turime aritmetinę progresiją: $3, 7, 11, 15, \ldots$
Ieškomą narių skaičių (n) rasime remdamiesi lygybe

$$105 = \frac{2 \cdot a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n, \quad 105 = \frac{2 \cdot 3 + 4 \cdot (n-1)}{2} \cdot n,$$
$$210 = \big(6 + 4(n-1)\big) \cdot n, \quad 210 = (6 + 4n - 4) \cdot n,$$
$$210 = (4n + 2) \cdot n, \quad 210 = 4n^2 + 2n,$$
$$2n^2 + n - 105 = 0, \quad D = 1 + 840 = 841 = 29^2,$$
$$n_1 = \frac{-1 - 29}{4} = -\frac{15}{2} \text{ (netinka pagal uždavinio prasmę),}$$
$$n_2 = \frac{-1 + 29}{4} = 7.$$

Vadinasi, pirmųjų 7 narių suma lygi 105.
Galima pasitikrinti:

$$3 + 7 + 11 + 15 + 19 + 23 + 27 = \frac{3 + 27}{2} \cdot 7 = 105.$$

Atsakymas. Septynių.

5c. Keturi teigiami skaičiai sudaro aritmetinę progresiją. Jei prie trečiojo skaičiaus pridėtume 4, o prie ketvirtojo pridėtume 16, tai gautieji keturi skaičiai sudarytų geometrinę progresiją. Apskaičiuokite šeštąjį aritmetinės progresijos narį.

a_1, a_2, a_3, a_4 — aritmetinė progresija,
a_1, a_2, $a_3 + 4$, $a_4 + 16$ — geometrinė progresija.
Reikia rasti a_6.
Narius a_2, a_3, a_4 išreikškime per a_1 ir d:

$$a_2 = a_1 + d, \quad a_3 = a_1 + 2d, \quad a_4 = a_1 + 3d.$$

Nagrinėkime geometrinę progresiją:

$$a_1, \quad a_1 + d, \quad a_1 + 2d + 4, \quad a_1 + 3d + 16.$$

Geometrinės progresijos viduriniojo nario savybė:
$b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, \ldots$ — geometrinė progresija.
$b_2^2 = b_1 \cdot b_3, \quad b_3^2 = b_2 \cdot b_4 = b_1 \cdot b_5,$
$b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1} = b_{n-2} \cdot b_{n+2} = \ldots$

Antrojo geometrinės progresijos nario kvadratas lygus pirmojo ir trečiojo narių sandaugai:

$$(a_1 + d)^2 = a_1 \cdot (a_1 + 2d + 4),$$
$$a_1^2 + 2a_1 d + d^2 = a_1^2 + 2a_1 d + 4a_1,$$
$$d^2 = 4a_1. \qquad (1)$$

Trečiojo geometrinės progresijos nario kvadratas lygus antrojo ir ketvirtojo narių sandaugai:

$$\frac{b_2}{b_1} = \frac{b_3}{b_2} \Rightarrow b_2 \cdot b_2 = b_1 \cdot b_3 \Rightarrow b_2^2 = b_1 \cdot b_3$$

$$(a_1 + 2d + 4)^2 = (a_1 + d)(a_1 + 3d + 16),$$
$$(a_1 + 2d + 4)(a_1 + 2d + 4) = a_1^2 + 3a_1 d + 16a_1 + a_1 d + 3d^2 + 16d,$$
$$a_1^2 + 2a_1 d + 4a_1 + 2a_1 d + 4d^2 + 8d + 4a_1 + 8d + 16 = a_1^2 + 4a_1 d + 16a_1 + 3d^2 + 16d,$$
$$a_1^2 + 4a_1 d + 8a_1 + 4d^2 + 16d + 16 = a_1^2 + 4a_1 d + 16a_1 + 3d^2 + 16d,$$
$$-8a_1 + d^2 + 16 = 0,$$
$$d^2 = 8a_1 - 16. \qquad (2)$$

Sulyginame (1) ir (2) dešiniąsias puses:

$$8a_1 - 16 = 4a_1, \quad 4a_1 = 16, \quad a_1 = 4.$$

Iš (1) apskaičiuojame d:

$$d^2 = 4 \cdot 4, \quad d^2 = 16, \quad d_1 = -4, \quad d_2 = 4.$$

Kai $d = -4$, tai aritmetinė progresija būtų:

$4, 0, -4, -16$ (netenkina sąlygos).

Kai $d = 4$, tai aritmetinė progresija:

$4, 8, 12, 16, 20, 24, \ldots$

Šeštasis jos narys $a_6 = 24$.
Patikriname, ar pagal sąlygą sudaryta seka bus geometrinė progresija:

$4, 8, 16, 32$ — geometrinė progresija.

Atsakymas. 24.

6a. Apskaičiuokite sumą visų lyginių natūraliųjų skaičių, mažesnių už 90.

Reikia apskaičiuoti sumą:

$$2 + 4 + 6 + 8 + \cdots + 82 + 84 + 86 + 88.$$

I būdas.
Pastebėkime, kad poromis sudėdami kraštinius narius, gauname 90:

$$\underbrace{2 + 4 + 6 + \ldots + 44 + 46 + \ldots + 84 + 86 + 88}$$

90
90
90
90

$$2 + 88 = 4 + 86 = 6 + 84 = \cdots = 44 + 46 = 90.$$

Tokių sumų iš viso yra $44 : 2 = 22$.
Vadinasi visa suma lygi

$$90 \cdot 22 = 1980.$$

II būdas. Reikia apskaičiuoti sumą aritmetinės progresijos, kurios $a_1 = 2$, $d = 2$, $a_n = 88$.
Nesunkiai nustatome, kad $n = 88 : 2 = 44$.
Remiantis formule $S_n = \frac{a_1+a_n}{2} \cdot n = \frac{2+88}{2} \cdot 44 = 45 \cdot 44 = 1980$.

Atsakymas. 1980.

6b. Apskaičiuokite nelygybės $0{,}3^{2\cdot1+2\cdot2+2\cdot3+\cdots+2\cdot x} > 0{,}3^{72}$, $x \in \boldsymbol{N}$, natūraliųjų sprendinių, ne mažesnių už 4, sumą.

Kai $0 < a < 1$, tai nelygybė $$a^{f(x)} > a^{g(x)}$$ ekvivalenti nelygybei $f(x) < g(x)$.

Kadangi $0{,}3 < 1$, tai duotoji nelygybė ekvivalenti nelygybei

$$2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + 2 \cdot x < 72,$$
$$2(1 + 2 + 3 + \cdots + x) < 72,$$
$$1 + 2 + 3 + \cdots + x < 36.$$

Reiškinys

$$1 + 2 + 3 + \cdots + x$$

yra suma aritmetinės progresijos, kurios $a_1 = 1$, $d = 1$, $a_n = x$, o iš viso progresiją sudaro x narių ($n = x$). Progresijos suma lygi:

$$\frac{1+x}{2} \cdot x.$$

$S_n = \frac{a_1+a_n}{2} \cdot n$

Sprendžiame nelygybę:

$$\frac{1+x}{2}\cdot x<36,\quad (1+x)\cdot x<72,$$
$$x^2+x-72<0,\quad D=289=17^2,$$
$$x_1=-9,\quad x_2=8;$$
$$(x-8)(x+9)<0,$$
$$x\in(-9;8).$$

Natūralieji sprendiniai, ne mažesni už 4:

4, 5, 6, 7.

Jų suma: $4+5+6+7=22$.

Atsakymas. 22.

6c. Išspręskite lygtį $\frac{1}{x}+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots=\frac{7}{2}$, jei $0<x<1$.

Nagrinėkime begalinę sumą

$$x+x^2+\cdots+x^n+\cdots$$

Kadangi $|x|<1$, o kiekvienas sumos narys lygus prieš jį esančiam nariui padaugintam iš x, tai šio reiškinio reikšmė yra be galo mažėjančios geometrinės progresijos, kurios

$$b_1=x,\quad q=x,$$

suma.

Begalinė geometrinė progresija, kurios vardiklis $|q|<1$, vadinama nykstamąja geometrine progresija.
Jos suma

$$S=\frac{b_1}{1-q}.$$

Raskime tą sumą

$$S=\frac{x}{1-x}.$$

Spręskime lygtį:

$$\frac{1}{x}+\frac{x}{1-x}=\frac{7}{2}\ \Big|\cdot x(1-x),$$
$$1-x+x^2=\frac{7}{2}x(1-x),\quad 2-2x+2x^2=7x-7x^2,$$
$$9x^2-9x+2=0,\quad D=9,\quad x_1=\frac{2}{3},\quad x_2=\frac{1}{3}.$$

Atsakymas. $\frac{1}{3}$; $\frac{2}{3}$.

7a. Raskite funkcijos $f(x) = 2\,\mathrm{e}^x(x^3 + 2x^2)$ reikšmių didėjimo ir reikšmių mažėjimo intervalus.

> Jei funkcijos $y = f(x)$ išvestinė intervale yra teigiama ($f'(x) > 0$), tai tame intervale funkcijos reikšmės didėja. Jei išvestinė yra neigiama, tai funkcijos reikšmės — mažėja.

Raskime duotosios funkcijos išvestinę:

$$f'(x) = (2\,\mathrm{e}^x)' \cdot (x^3 + 2x^2) + 2\,\mathrm{e}^x \cdot (x^3 + 2x^2)',$$

> $(uv)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$$f'(x) = 2\,\mathrm{e}^x \cdot (x^3 + 2x^2) + 2\,\mathrm{e}^x \cdot (3x^2 + 4x),$$

> $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x, \quad (x^n)' = nx^{n-1}$

$$f'(x) = 2\,\mathrm{e}^x \cdot (x^3 + 2x^2 + 3x^2 + 4x) = 2\,\mathrm{e}^x \cdot (x^3 + 5x^2 + 4x).$$

Raskime x reikšmes, su kuriomis $f'(x) > 0$. Sprendžiame nelygybę:

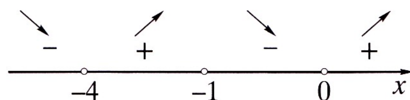
$$2\,\mathrm{e}^x \cdot (x^3 + 5x^2 + 4x) > 0 \;\big|\; : 2\,\mathrm{e}^x (2\,\mathrm{e}^x > 0),$$
$$x^3 + 5x^2 + 4x > 0,$$
$$x(x^2 + 5x + 4) > 0.$$

Skliaustuose esantį trinarį skaidome dauginamaisiais:

$$x^2 + 5x + 4 = 0, \quad D = 9, \quad x_1 = -4, \quad x_2 = -1;$$
$$x^2 + 5x + 4 = (x + 4)(x + 1).$$

Turime

$$x(x + 4)(x + 1) > 0,$$
$$x \in (-4; -1) \cup (0; +\infty).$$



Vadinasi, kai $x \in (-4; -1)$ ir, kai $x \in (0; +\infty)$, tai funkcijos reikšmės didėja.
Kai $f(x)$ išvestinė neigiama, tai funkcijos reikšmės mažėja.

$$x(x + 4)(x + 1) < 0, \text{ kai } x \in (-\infty; -4) \cup (-1; 0).$$

Vadinasi, funkcijos reikšmės mažėja intervaluose

$$(-\infty; -4), (-1; 0).$$

Atsakymas. Funkcijos reikšmės didėja, kai $x \in (-4; -1)$ ir $(0; +\infty)$; mažėja, kai $x \in (-\infty; -4)$ ir $(-1; 0)$.

7b. Funkcijos $f(x) = -x^2 + px + q$ grafikas eina per taškus $A(-2; 5)$ ir $B(2; -3)$.
1) Raskite p ir q reikšmes.
2) Raskite funkcijos kritinius taškus.
3) Raskite didžiausią funkcijos reikšmę intervale $x \in [-6; 5]$.

Jei taškas $(a; b)$ priklauso funkcijos $y = f(x)$ grafikui, tai teisinga lygybė $b = f(a)$.

1) Funkcijos $f(x)$ grafikas eina per taškus $(x; y)$, kurių koordinates sieja lygybė

$$y = -x^2 + px + q.$$

Vadinasi, teisingos yra tokios lygybės:

$$\begin{cases} 5 = -(-2)^2 + p \cdot (-2) + q, \\ -3 = -2^2 + p \cdot 2 + q. \end{cases}$$

p ir q rasime išsprendę sistemą:

$$+\begin{cases} 5 = -4 - 2p + q, \\ -3 = -4 + 2p + q \end{cases}$$

$$2 = -8 + 2q,$$

$$2q = 10, \quad q = 5; \quad p = \frac{q-9}{2} = \frac{5-9}{2} = -2.$$

Vadinasi, $f(x) = -x^2 - 2x + 5$.
2) Taškai, kuriuose funkcijos išvestinė lygi 0, yra kritiniai taškai.
Randame funkcijos $f(x) = -x^2 - 2x + 5$ išvestinę:

$$f'(x) = (-x^2 - 2x + 5)' = -2x - 2.$$

Randame x reikšmes, su kuriomis $f'(x) = 0$:

$$-2x - 2 = 0, \quad x = -1 \in [-6; 5].$$

Vadinasi, $x = -1$ yra funkcijos kritinis taškas.
3)

Didžiausią reikšmę uždarame intervale funkcija įgyja arba intervalo galuose, arba ekstremumų taškuose, kurie priklauso tam uždaram intervalui.

Taškas $x = -1$ yra maksimumo taškas, nes šiame taške funkcijos išvestinė „ − “ ženklą keičia į „ + “ ženklą.
Skaičiuojame funkcijos reikšmes taškuose -6, -1 ir 5:

$$f(-6) = -(-6)^2 - 2 \cdot (-6) + 5 = -36 + 12 + 5 = -19,$$
$$f(-1) = -(-1)^2 - 2 \cdot (-1) + 5 = -1 + 2 + 5 = 6,$$
$$f(5) = -5^2 - 2 \cdot 5 + 5 = -25 - 10 + 5 = -30.$$

Didžiausia iš gautųjų reikšmių yra reikšmė 6. Vadinasi, didžiausia funkcijos reikšmė intervale $[-6; 5]$ lygi 6.

Atsakymas. 1) $p = -2$, $q = 5$; 2) $x = -1$; 3) $y = 6$.

7c. Funkcijos $f(x) = a\ln(2-3x)$ grafiko liestinė taške, kurio abscisė $x_0 = -1$, pasvirusi į abscisių ašį 60° kampu.

1) Raskite funkcijos apibrėžimo sritį.
2) Raskite parametro a reikšmę.
3) Raskite funkcijos grafiko ir liestinės lietimosi taško koordinatę y.
4) Parodykite, kad liestinės lygtis yra $y = -\frac{5\sqrt{3}}{3}\ln 5 + \sqrt{3}(x+1)$.

Funkcijos $y = f(x)$ apibrėžimo sritis yra tos x reikšmės, su kuriomis reiškinys $f(x)$ turi prasmę.

1) Reiškinys $a \cdot \ln(2-3x)$ turi prasmę, kai

$$2 - 3x > 0, \quad -3x > -2, \quad x < \frac{2}{3}.$$

Funkcijos $f(x)$ apibrėžimo sritis $x \in \left(-\infty; \frac{2}{3}\right)$.
2) Funkcijos išvestinė taške $x = -1$ lygi tangentui kampo, kurį sudaro tos funkcijos grafiko liestinė (einanti per grafiko tašką, kurio $x = -1$) su Ox ašimi.
Vadinasi, teisinga yra lygybė:

$$f'(-1) = \operatorname{tg} 60^\circ.$$

Raskime $f'(x)$:

$$f'(x) = a \cdot \frac{1}{2-3x} \cdot (2-3x)' = \frac{-3a}{2-3x} = \frac{3a}{3x-2}.$$

$\left[\ln(f(x))\right]' = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)$

Randame $f'(-1)$:

$$f'(-1) = \frac{3a}{3\cdot(-1)-2} = \frac{3a}{-5} = -\frac{3}{5}a.$$

Kadangi $\operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$, tai

$$-\frac{3}{5}a = \sqrt{3}, \quad a = -\frac{5\sqrt{3}}{3}.$$

3)

$$f(x) = -\frac{5\sqrt{3}}{3}\ln(2-3x); \qquad f(-1) = -\frac{5\sqrt{3}}{3}\ln\left(2 - 3\cdot(-1)\right) = -\frac{5\sqrt{3}}{3}\ln 5.$$

Vadinasi, taškas $\left(-1; -\frac{5\sqrt{3}}{3}\ln 5\right)$ priklauso funkcijos grafikui (per tą tašką nubrėžta liestinė).
4)

Funkcijos $y = f(x)$ grafiko liestinės, einančios per tašką x_0, lygtis $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

Liestinės lygtis

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0); \quad x_0 = -1.$$

$$f(x_0) = f(-1) = -\frac{5\sqrt{3}}{3}\ln 5.$$

$$f'(x_0) = f'(-1) = -\frac{3}{5}a = -\frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{5\sqrt{3}}{3}\right) = \sqrt{3}.$$

Vadinasi, liestinės lygtis

$$y = \sqrt{3}\big(x - (-1)\big) + \left(-\frac{5\sqrt{3}}{3}\ln 5\right) = \sqrt{3}(x+1) - \frac{5\sqrt{3}}{3}\ln 5.$$

Atsakymas. 1) $x \in \left(-\infty; \frac{2}{3}\right)$; 2) $a = -\frac{5\sqrt{3}}{3}$; 3) $y = -\frac{5\sqrt{3}}{3}\ln 5$.

8. Duotos funkcijos $f(x) = \sqrt{3} - 5x + 2{,}5\cos(\pi - 2x)$ ir $g(x) = -0{,}2\,\mathrm{tg}(5x + 10)$.
1) Raskite $f'(x)$ ir $g'(x)$.
2) Apskaičiuokite $g'(-2)$.
3) Išspręskite lygtį $f'(x) + 2\cos^2(2x) = g'(-2)$.

$(\cos x)' = -\sin x, \quad (\mathrm{tg}\, x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

1) Randame $f(x)$ išvestinę:

$$f'(x) = \left(\sqrt{3} - 5x + 2{,}5\cos(\pi - 2x)\right)' =$$
$$= 0 - 5 + 2{,}5\cdot\big(-\sin(\pi - 2x)\big)\cdot(\pi - 2x)' =$$
$$= -5 - 2{,}5\sin(\pi - 2x)\cdot(0 - 2) = -5 + 5\sin(\pi - 2x).$$

Beje, $\sin(\pi - 2x) = \sin(2x)$.

$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha.$

Pastaba. Prieš ieškant funkcijos $f(x)$ išvestinės galima buvo $\cos(\pi - 2x)$ pertvarkyti:

$$\cos(\pi - 2x) = -\cos(2x).$$

$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha.$

Taigi

$$f'(x) = -5 + 5\sin(2x).$$

Randame $g(x)$ išvestinę:

$$g'(x) = \big(-0{,}2\,\mathrm{tg}(5x + 10)\big)' = -0{,}2\cdot\frac{1}{\cos^2(5x + 10)}\cdot(5x + 10)' = -\frac{1}{\cos^2(5x + 10)}.$$

2) $g'(-2) = -\frac{1}{\cos^2(5\cdot(-2) + 10)} = -\frac{1}{\cos^2 0} = -\frac{1}{1^2} = -1.$
3) Sprendžiame lygtį $f'(x) + 2\cos^2(2x) = g'(-2)$:

$$-5 + 5\sin(2x) + 2\cos^2(2x) = -1, \quad -5 + 5\sin(2x) + 2\big(1 - \sin^2(2x)\big) = -1.$$

Pažymėkime $\sin(2x) = y$. Tada:

$$-5 + 5y + 2(1 - y^2) = -1, \quad -5 + 5y + 2 - 2y^2 + 1 = 0,$$
$$-2y^2 + 5y - 2 = 0, \quad 2y^2 - 5y + 2 = 0, \quad D = 9,$$
$$y_1 = 2, \quad y_2 = \frac{1}{2}.$$

Grįžtame prie x:

$\sin(2x) = 2$ — sprendinių nėra;

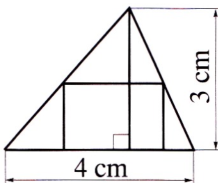
$$\sin(2x) = \frac{1}{2},$$

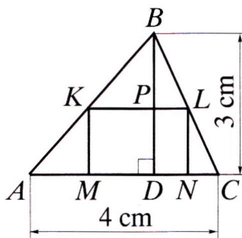
$\sin x = a, \quad x = (-1)^k \arcsin a + \pi k,\ k \in \mathbf{Z}, \quad -1 \leqslant a \leqslant 1.$

$$2x = (-1)^k \arcsin\frac{1}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbf{Z},$$
$$2x = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k,$$
$$x = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2} \cdot k.$$

Atsakymas. 1) $f'(x) = -5 + 5\sin(2x)$, $g'(x) = -\frac{1}{\cos^2(5x+10)}$;
2) $g'(-2) = -1$;
3) $x = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2} \cdot k$, $k \in \mathbf{Z}$.

9a. Į trikampį įbrėžtas stačiakampis taip, kad viena jo kraštinė yra trikampio kraštinės dalis ir visos viršūnės yra trikampio kraštinėse. Ar gali šio stačiakampio plotas būti didesnis negu $3\,\text{cm}^2$? Atsakymą pagrįskite.





$\triangle ACB \backsim \triangle KLB$, nes $KL \parallel AC$. Vadinasi,

$$\frac{AC}{KL} = \frac{BD}{BP}.$$

Pažymėkime stačiakampio vieną kraštinę x:

$$KL = x.$$

Turime

$$\frac{4}{x}=\frac{3}{3-PD}.$$

Išsireikškime PD (ji lygi kitai stačiakampio kraštinei):

$$4\cdot(3-PD)=3x,\quad 12-4PD=3x,\quad PD=\frac{12-3x}{4}.$$

Stačiakampio $KLNM$ plotas lygus:

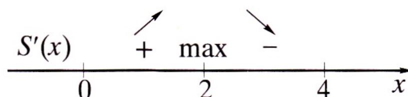
$$S(x)=x\cdot\frac{12-3x}{4}=x\cdot\left(3-\frac{3}{4}x\right)=3x-\frac{3}{4}x^2.$$

Didžiausią plotą turės tas stačiakampis, kurio $S'(x)$ bus lygi 0.
Randame ploto funkcijos išvestinę:

$$S'(x)=\left(3x-\frac{3}{4}x^2\right)'=3-\frac{3}{2}x.$$

Prilyginame išvestinę 0:

$$3-\frac{3}{2}x=0,\quad x=2.$$



Vadinasi, didžiausią plotą turi stačiakampis, kurio $KL=2\,\text{cm}$.
Randame kitą to stačiakampio kraštinę:

$$KM=PD=\frac{12-3\cdot 2}{4}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}\,\text{cm}.$$

Apskaičiuojame stačiakampio plotą:

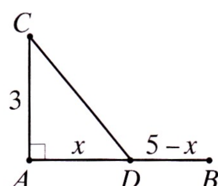
$$2\cdot\frac{3}{2}=3\,(\text{cm}^2).$$

Plotą galėjome apskaičiuoti ir remdamiesi sudaryta ploto formule $S(x)=3x-\frac{3}{4}x^2$:

$$S(2)=3\cdot 2-\frac{3}{4}\cdot 2^2=3\,(\text{cm}^2).$$

Atsakymas. Negali.

9b. Valtis C nuo artimiausio kranto taško A nutolusi 3 km atstumu. Valtimi plaukia poilsiautojas į stovyklavietę B, kuri yra ant kranto ir nuo taško A nutolusi 5 km. Poilsiautojas valtimi iriasi 4 km/h greičiu, o išlipęs į krantą per valandą nueina 5 km. Į kokį kranto tašką turi plaukti valtis, kad poilsiautojas patektų į stovyklavietę per trumpiausią laiką?



Sakykime, kad trumpiausias laikas bus, kai ieškomas taškas bus D.
Pažymėkime atstumą $AD=x$ (km), tada $DB=5-x$ (km).
Iš stačiojo $\triangle ACD$ raskime atstumą CD:

$$CD=\sqrt{3^2+x^2}=\sqrt{9+x^2}\,(\text{km}).$$

Atstumą CD poilsiautojas įveiks per laiką, lygų:

$$\frac{\sqrt{9+x^2}}{4}\ (\text{h}).$$

$$\boxed{t = \frac{s}{v}}$$

Atstumą DB poilsiautojas įveiks per laiką, lygų:

$$\frac{5-x}{5}\ (\text{h}).$$

Iš viso kelionėje jis užtruks

$$\frac{\sqrt{9+x^2}}{4} + \frac{5-x}{5}\ (\text{h}).$$

Sudarėme kelionėje užtrukto laiko funkciją, kurios nepriklausomasis kintamasis yra atstumas nuo A iki D ($x = AD$). Ta funkcija

$$T(x) = \frac{\sqrt{9+x^2}}{4} + \frac{5-x}{5}, \quad x \in [0; 5]$$

mažiausią reikšmę įgis arba intervalo $[0; 5]$ galuose, arba ekstremumo taške.
Raskime funkcijos išvestinę:

$$T'(x) = \left(\frac{\sqrt{9+x^2}}{4} + \frac{5-x}{5}\right)' = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2\sqrt{9+x^2}}\cdot(9+x^2)' + \frac{1}{5}\cdot(5-x)' =$$
$$= \frac{2x}{8\sqrt{9+x^2}} - \frac{1}{5} = \frac{x}{4\sqrt{9+x^2}} - \frac{1}{5}.$$

Ieškome x reikšmių, su kuriomis $T'(x) = 0$:

$$\frac{x}{4\sqrt{9+x^2}} - \frac{1}{5} = 0, \quad \frac{5x - 4\sqrt{9+x^2}}{20\sqrt{9+x^2}} = 0,$$

$$\begin{cases} 5x - 4\sqrt{9+x^2} = 0, \\ 20\sqrt{9+x^2} \neq 0, \end{cases} \quad \begin{cases} 5x = 4\sqrt{9+x^2} \ \uparrow^2, \\ 9+x^2 \neq 0, \end{cases} \quad \begin{cases} 25x^2 = 16\cdot(9+x^2), \\ x^2 \neq -9. \end{cases}$$

$$25x^2 = 144 + 16x^2, \quad 9x^2 = 144, \quad x^2 = \frac{144}{9}, \quad x^2 = 16;$$

$$x_1 = -4 \text{ (netinka pagal prasmę)}, \quad x_2 = 4.$$

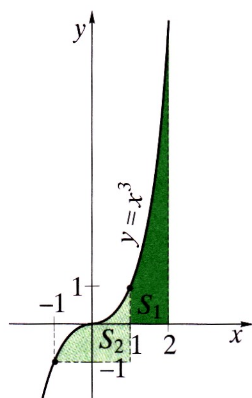
Skaičiuojame $T(x)$ reikšmes intervalo galuose ir ekstremumo taške:

$$T(0) = \frac{\sqrt{9+0^2}}{4} + \frac{5-0}{5} = \frac{3}{4} + 1 = 1{,}75\ (\text{h}),$$
$$T(5) = \frac{\sqrt{9+5^2}}{4} + \frac{5-5}{5} = \frac{\sqrt{34}}{4} + 0 = \frac{\sqrt{34}}{4} \approx 1{,}458\ (\text{h}),$$
$$T(4) = \frac{\sqrt{9+4^2}}{4} + \frac{5-4}{5} = \frac{5}{4} + \frac{1}{5} = \frac{29}{20} = 1{,}45\ (\text{h}).$$

Mažiausias iš laikų yra 1,45 h (kai $x = 4$ km).
Vadinasi, reikia plaukti į tašką D, kuris nuo A nutolęs 4 km atstumu (o nuo B 1 km atstumu).

Atsakymas. Reikia plaukti į tašką, kuris nuo taško A nutolęs 4 km atstumu.

1. Brėžinyje nuspalvintų kreivinių trapecijų plotai S_1 ir S_2 yra tokie, kad:



A $S_1 = S_2$
B $S_1 > S_2$
C $S_1 = 2S_2$
D $S_1 < S_2$
E $S_1 = \frac{3}{2}S_2$

2. Funkcijos $f(x) = (3x+3)^2$ pirmykštė yra:

A $(3x+3)^3+C$ **B** $\frac{1}{3}(3x+3)^3+C$ **C** $\frac{1}{9}(3x+3)^3+C$ **D** $\frac{(3x+3)^2}{2}+C$ **E** $2(3x+3)+C$

3. Pintinėje yra 10 vaisių. Visi jie yra skirtingų rūšių. Iš pintinės imame 4 vaisius. Kiek skirtingų vaisių ketvertų galima paimti (ketvertai laikomi skirtingais, kai skiriasi bent vienu vaisiumi)?

A 5040 **B** 24 **C** 210 **D** 40 **E** 3040

4. Lošimo kauliukas metamas 2 kartus. Apskaičiuokite tikimybę įvykio, kad atvirtusių akučių suma bus lygi 5.

A $\frac{5}{36}$ **B** $\frac{18}{35}$ **C** $\frac{1}{2}$ **D** $\frac{1}{9}$ **E** $\frac{7}{36}$

5. Kiek iš žodžio MOKINYS raidžių galima sudaryti tokių žodžių (nebūtinai prasmingų), kad raidės N ir O nebūtų greta?

A 5040 **B** 1440 **C** 3600 **D** 720 **E** 360

6. a) Raskite funkcijos $f(x) = \frac{3}{\cos^2(2x)}$ pirmykštę funkciją $F(x)$.
b) Raskite funkcijos $f(x) = x^4$ pirmykštę funkciją $F(x)$, kuri eina per tašką $M(-1; 2)$.

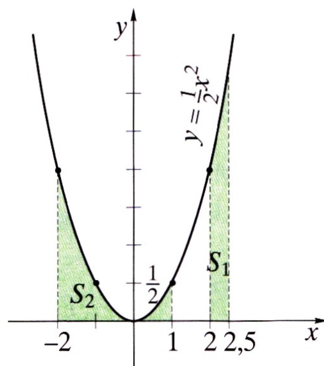
7. Apskaičiuokite integralą: a) $\int_1^2 6x^5\,dx$; b) $\int_0^9 \frac{x-4}{\sqrt{x}-2}\,dx$; c) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x - \sin(3x)}{\cos(2x)}\,dx$.

8. Apskaičiuokite plotą figūros, apribotos kreivėmis:
a) $y = 9 - x^2$, $y = 0$; b) $y = \frac{4}{x}$, $y = 5 - x$.

9. Apskaičiuokite plotą figūros, apribotos parabole $y = x^2 - 2x + 2$, šios parabolės liestine, nubrėžta per tašką $(3; 5)$, ir tiesėmis $x = 0$, $y = 0$.

10. a) Grupėje yra 3 vaikinai ir 2 merginos. Burtų keliu reikia išrinkti 2 jaunuolius dalyvauti varžybose. Kokia tikimybė, kad tarp išrinktųjų bus 1 vaikinas ir 1 mergina?
b) Tikimybė, kad optikos salone žmogus galės įsigyti tinkamus akinius, lygi 0,4. Mieste yra 3 optikos salonai. Žmogus eina į salonus tol, kol randa tinkamus akinius. Atsitiktinis dydis X — žmogaus aplankytų salonų skaičius. Sudarykite atsitiktinio dydžio X skirstinį ir apskaičiuokite jo matematinę viltį $\mathbf{E}X$.

1. Brėžinyje nuspalvintų kreivinių trapecijų plotai S_1 ir S_2 yra tokie, kad:



A $S_1 < S_2$
B $S_2 > S_1$
C $S_1 = 2S_2$
D $S_1 = S_2$
E $S_2 = 1{,}5S_1$

2. Funkcijos $f(x) = (5x-2)^2$ pirmykštė yra:

A $\frac{(5x-2)^3}{3}+C$ **B** $2(5x-2)+C$ **C** $\frac{1}{15}(5x-2)^3+C$ **D** $(5x-2)^3+C$ **E** $\frac{5}{3}(5x-2)^3+C$

3. Keliais skirtingais būdais galima išrinkti 2 atstovus į mokyklos tarybą iš 5 kandidatų?
A 20 **B** 25 **C** 9 **D** 10 **E** 12

4. Ant stalo guli 10 žurnalų, iš kurių 2 yra apie žvejybą. Du vaikinai nežiūrėdami pasidalijo juos po lygiai. Kokia tikimybė, kad kiekvienam iš jų teko po vieną žurnalą apie žvejybą?
A $\frac{5}{9}$ **B** $\frac{5}{18}$ **C** $\frac{1}{2}$ **D** $\frac{4}{5}$ **E** 1

5. Kiek iš žodžio KNYGA raidžių galima sudaryti žodžių (nebūtinai prasmingų), kad raidės G ir A nebūtų greta?
A 72 **B** 120 **C** 48 **D** 20 **E** 100

6. a) Raskite funkcijos $f(x) = \frac{2}{3\sin^2(2x)}$ pirmykštę funkciją $F(x)$.
b) Raskite funkcijos $f(x) = \frac{1}{x^4}$ pirmykštę funkciją $F(x)$, kuri eina per tašką $M(2; -3)$.

7. Apskaičiuokite integralą:

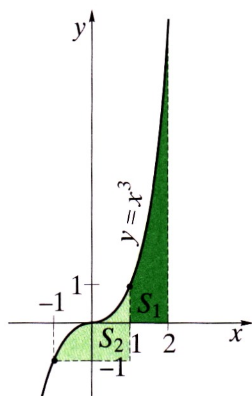
a) $\int_1^2 x^3\,dx$; b) $\int_2^3 \frac{x^2-3x+2}{x-1}\,dx$; c) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos^3 x}{1+\cos(2x)}\,dx$.

8. Apskaičiuokite plotą figūros, apribotos kreivėmis:
a) $y = 2x - x^2$, $y = 0$; b) $y = \frac{3}{x}$, $y = 4 - x$.

9. Apskaičiuokite plotą figūros, apribotos parabole $y = -x^2 - 4x - 3$, ir šios parabolės liestinėmis, nubrėžtomis per taškus $(0; -3)$ ir $(-3; 0)$.

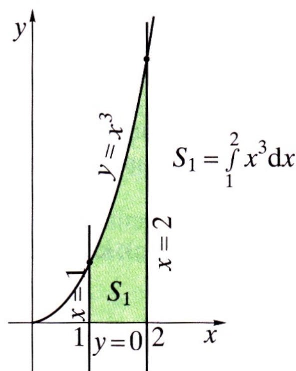
10. a) Dėžėje yra 3 balti ir 4 raudoni rutuliai. Nežiūrint traukiami 2 rutuliai. Kokia tikimybė, kad tarp ištrauktų rutulių 1 rutulys bus baltas ir 1 raudonas?
b) Medžiotojas turi 3 šovinius ir šaudo į taikinį tol, kol pataiko arba kol baigiasi šoviniai. Atsitiktinis dydis X — šūvių skaičius. Sudarykite atsitiktinio dydžio X skirstinį ir apskaičiuokite jo matematinę viltį, žinodami, kad pataikymo tikimybė lygi 0,3.

1. Brėžinyje nuspalvintų kreivinių trapecijų plotai S_1 ir S_2 yra tokie, kad:

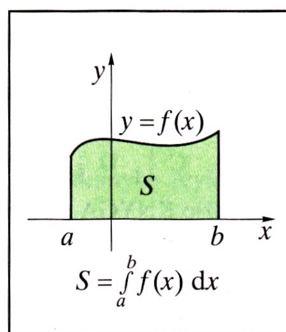


A $S_1 = S_2$
B $S_1 > S_2$
C $S_1 = 2S_2$
D $S_1 < S_2$
E $S_1 = \frac{3}{2}S_2$

Plotą S_1 riboja kreivinė trapecija, t. y. tiesės $x = 1$, $x = 2$, $y = 0$ (Ox ašis) ir kubinė parabolė $y = x^3$. Tos figūros plotas S_1 lygus integralui:



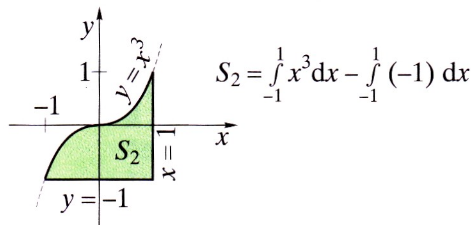
$S_1 = \int_1^2 x^3 dx$



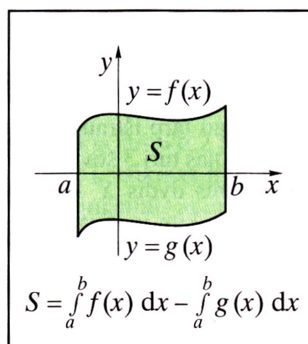
Apskaičiuojame to integralo reikšmę:

$$S_1 = \int_1^2 x^3\,dx = \frac{x^4}{4}\Big|_1^2 = \frac{2^4}{4} - \frac{1^4}{4} = \frac{16}{4} - \frac{1}{4} = \frac{15}{4} = 3\frac{3}{4}.$$

Plotą S_2 riboja kreivinis trikampis, t. y. tiesės $y = -1$, $x = 1$ ir kubinė parabolė $y = x^3$. Tą plotą galima skaičiuoti įvairiai. S_2 apskaičiuokime integruodami:



$S_2 = \int_{-1}^{1} x^3 dx - \int_{-1}^{1} (-1)\,dx$



Skaičiuojame:

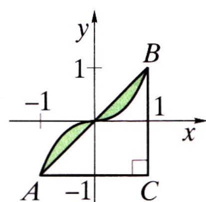
$$S_2 = \int_{-1}^{1} x^3\,dx - \int_{-1}^{1} (-1)\,dx = \int_{-1}^{1} x^3\,dx + \int_{-1}^{1} 1\,dx = \int_{-1}^{1} \left(x^3 + 1\right)dx =$$

$$= \left(\frac{x^4}{4} + x\right)\Big|_{-1}^{1} = \left(\frac{1^4}{4} + 1\right) - \left(\frac{(-1)^4}{4} + (-1)\right) = \frac{1}{4} + 1 - \frac{1}{4} + 1 = 2.$$

Bet S_2 plotą galima skaičiuoti ir nesiremiant integralais. Pastebėkime, kad I ketvirtyje esantis kreivinis trikampėlis ir III ketvirtyje esantis kreivinis trikampėlis sudaro vienetinį kvadratėlį. To kvadratėlio plotas lygus 1. Belieka pridėti IV ketvirtyje esančio vienetinio kvadratėlio plotą (jis lygus 1).

$$S_2 = 1 + 1 = 2.$$

Taip pat galima kreivinį trikampį „ištiesinti“.



$AC = 2$, $BC = 2$, $\triangle ACB$ — status ($\angle C = 90^\circ$),

$S_{\triangle ACB} = \frac{AC \cdot BC}{2} = \frac{2 \cdot 2}{2} = 2.$

Taigi gavome, kad:

$$S_1 = 3\frac{3}{4}, \quad S_2 = 2.$$

Iš pateiktųjų atsakymų matome, kad netinka atsakymai

A $S_1 = S_2$ ir **D** $S_1 < S_2$.

Taip pat nesunku atmesti atsakymą

C $S_1 = 2S_2$.

Tikriname atsakymą

E $S_1 = \frac{3}{2} S_2$.

Jei **E** bus neteisingas, tai liks teisingas atsakymas **B** $S_1 > S_2$.
Skaičiuojame:

$$\frac{3}{2} \cdot S_2 = \frac{3}{2} \cdot 2 = 3 \neq S_1.$$

Vadinasi, teisingas atsakymas **B** $S_1 > S_2$.

Atsakymas. **B.**

2. Funkcijos $f(x) = (3x+3)^2$ pirmykštė yra:

A $(3x+3)^3 + C$ **B** $\frac{1}{3}(3x+3)^3 + C$ **C** $\frac{1}{9}(3x+3)^3 + C$ **D** $\frac{(3x+3)^2}{2} + C$ **E** $2(3x+3) + C$

Funkcija	Funkcijos pirmykštė
$f(x) = x^n$	$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$f(x) = kx + b$	$F(x) = \frac{k}{2}x^2 + bx + C$
$f(x) = (kx+b)^n$	$F(x) = \frac{1}{k} \cdot \frac{(kx+b)^{n+1}}{n+1} + C,\ k \neq 0$
$f(x) = f(kx+b)$	$F(x) = \frac{1}{k} \cdot F(kx+b),\ k \neq 0$

Randame duotosios funkcijos $f(x)$ pirmykštę:

$$F(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{(3x+3)^{2+1}}{2+1} + C = \frac{(3x+3)^3}{9} + C.$$

Atsakymas. **C.**

3. Pintinėje yra 10 vaisių. Visi jie yra skirtingų rūšių. Iš pintinės imame 4 vaisius. Kiek skirtingų vaisių ketvertų galima paimti (ketvertai laikomi skirtingais, kai skiriasi bent vienu vaisiumi)?
A 5040 **B** 24 **C** 210 **D** 40 **E** 3040

I būdas. Pasirinkti pirmąjį vaisių iš 10 yra 10 skirtingų būdų.
Pasirinkti antrąjį vaisių iš 9 likusių yra 9 būdai. Iš viso tų porų bus

$$10 \cdot 9.$$

Bet čia svarbu suvokti, kad šiame uždavinyje vaisių pasirinkimo tvarka yra *nesvarbi.* O tarp

$$10 \cdot 9 = 90 \text{ vaisių porų}$$

yra po dvi vienodas poras (pvz., obuolys + kriaušė; kriaušė + obuolys), taigi skirtingų porų bus dvigubai mažiau:

$$\frac{10 \cdot 9}{2} = 45.$$

Pasirinkti tris vaisius iš 10 (kai tvarka svarbi) yra

$$10 \cdot 9 \cdot 8 \text{ būdai.}$$

Bet čia įskaičiuoti ir sutampantys trejetai (pvz., obuolys + kriaušė + apelsinas = obuolys + + apelsinas + kriaušė = kriaušė + obuolys + apelsinas = kriaušė + apelsinas + obuolys = = apelsinas + obuolys + kriaušė = apelsinas + kriaušė + obuolys).
Kitaip sakant, 3 elementus sukeisti vietomis galima $3 \cdot 2 = 6$ būdais.
Vadinasi, paimti 3 vaisius iš 10 (kai ėmimo tvarka nesvarbi) galima

$$\frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2} \text{ būdais.}$$

Analogiškai, paimti 4 vaisius iš 10 (kai tvarka nesvarbi) galima

$$\frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2} \text{ būdais.}$$

Šio reiškinio reikšmė ir yra atsakymas:

$$\frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 10 \cdot 3 \cdot 7 = 210.$$

II būdas. Žinoma, čia galima remtis ir derinių formule

$$C_{10}^4 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 210.$$

Atsakymas. **C**.

4. Lošimo kauliukas metamas 2 kartus. Apskaičiuokite tikimybę įvykio, kad atvirtusių akučių suma bus lygi 5.

A $\frac{5}{36}$ **B** $\frac{18}{35}$ **C** $\frac{1}{2}$ **D** $\frac{1}{9}$ **E** $\frac{7}{36}$

Tokius uždavinius patogu spręsti sudarant galimybių lentelę. Lentelėje surašome atvirtusių akučių sumas.

II \ I	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀	2	3	4	5	6	7
⚁	3	4	5	6	7	8
⚂	4	5	6	7	8	9
⚃	5	6	7	8	9	10
⚄	6	7	8	9	10	11
⚅	7	8	9	10	11	12

Tarp 36 sumų yra 4 sumos lygios 5.
Vadinasi, tikimybė, kad atvirtusių akučių suma bus lygi 5, yra:

$$\frac{4}{36} = \frac{1}{9}.$$

Atsakymas. **D**.

5. Kiek iš žodžio MOKINYS raidžių galima sudaryti tokių žodžių (nebūtinai prasmingų), kad raidės N ir O nebūtų greta?
A 5040 **B** 1440 **C** 3600 **D** 720 **E** 360

Suskaičiuokime, kiek yra žodžių, kai N ir O stovi greta. Pora NO gali būti 6 skirtingose žodžio vietose:

								Tokių žodžių bus:
1)	N	O						$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$
2)		N	O					$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$
3)			N	O				$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$
4)				N	O			$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$
5)					N	O		$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$
6)						N	O	$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

Iš viso $6 \cdot (5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) = 6 \cdot 120 = 720$ žodžių

Tiek pat žodžių bus ir su pora ON. Vadinasi, turime dar 720 negalimų žodžių. Taigi iš visų 7-ių raidžių žodžių skaičiaus reikia atimti $720 \cdot 2 = 1440$.
7 raides sukeisti vietomis (čia raidžių tvarka yra svarbi) galima

$$7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$$

būdų.
Pagal sąlygą tinka

$$5040 - 1440 = 3600.$$

Sprendimą galima užrašyti trumpiau.

> n elementų sukeisti vietomis galima $n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 1$ būdais.

Skirtingų būdų 7 raides sukeisti vietomis yra

$$7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

Į raidžių dvejetą ON žiūrėkime kaip į vieną raidę ir apskaičiuokime 6 raidžių perstatų skaičių:

$$6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

Tą patį darykime su dvejetu NO.
Taigi atsakymas lygus skirtumui:

$$\begin{aligned} 7! - 2 \cdot 6! &= 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 - 2 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = \\ &= (6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) \cdot (7 - 2) = \\ &= 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 = \\ &= 3600. \end{aligned}$$

Atsakymas. **C**

6a. Raskite funkcijos $f(x) = \frac{3}{\cos^2(2x)}$ pirmykštę funkciją $F(x)$.

$f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ pirmykštė $F(x) = \mathrm{tg}(x) + C$,
$f(x) = \frac{1}{\cos^2(kx+b)}$ pirmykštė $F(x) = \frac{1}{k} \cdot \mathrm{tg}(kx + b) + C$, $k \neq 0$

Randame duotosios funkcijos $f(x)$ pirmykštę:

$$F(x) = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \mathrm{tg}(2x) + C = \frac{3}{2}\,\mathrm{tg}(2x) + C.$$

Pravartu pasitikrinti, ar nesuklydome. Raskime $F(x)$ išvestinę (ji turi būti lygi $f(x)$):

$$F'(x) = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\cos^2(2x)} \cdot (2x)' + C' =$$

$$= \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\cos^2(2x)} \cdot 2 + 0 = \frac{3}{\cos^2(2x)} = f(x).$$

$\left[\mathrm{tg}(kx + b)\right]' = \frac{k}{\cos^2(kx+b)}$.

Atsakymas. $F(x) = \frac{3}{2}\,\mathrm{tg}(2x) + C$.

6b. Raskite funkcijos $f(x) = x^4$ pirmykštę funkciją $F(x)$, kuri eina per tašką $M(-1; 2)$.

Randame funkcijos $f(x)$ visas pirmykštes funkcijas:

$$F(x) = \frac{x^5}{5} + C.$$

x^n pirmykštės $\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$

Randame tą C reikšmę, su kuria $F(-1) = 2$:

$$\frac{(-1)^5}{5} + C = 2,$$
$$-\frac{1}{5} + C = 2,$$
$$C = 2\frac{1}{5}.$$

Taigi ieškoma pirmykštė yra $F(x) = \frac{x^5}{5} + 2\frac{1}{5}$.

Atsakymas. $F(x) = \frac{x^5}{5} + 2\frac{1}{5}$.

7a. Apskaičiuokite integralą $\int_1^2 6x^5\,\mathrm{d}x$.

$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)\big|_a^b = F(b) - F(a)$,
$\int_a^b x^n\,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_a^b = \frac{b^{n+1}}{n+1} - \frac{a^{n+1}}{n+1} = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}$

Skaičiuojame:

$$\int_1^2 6x^5\,\mathrm{d}x = 6\cdot\frac{x^6}{6}\Big|_1^2 = x^6\Big|_1^2 = 2^6 - 1^6 = 64 - 1 = 63.$$

Atsakymas. 63.

7b. Apskaičiuokite integralą $\int_0^9 \frac{x-4}{\sqrt{x}-2}\,\mathrm{d}x$.

Iš karto rasti integralą nepavyks. Pertvarkykime pointegralinį reiškinį:

$$\frac{x-4}{\sqrt{x}-2} = \frac{(\sqrt{x})^2 - 2^2}{\sqrt{x}-2} = \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}-2} = \sqrt{x}+2.$$

Integruojame:

$$\int_0^9 \frac{x-4}{\sqrt{x}-2}\,\mathrm{d}x = \int_0^9 (\sqrt{x}+2)\,\mathrm{d}x = \left(\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + 2x\right)\Bigg|_0^9 =$$

$$= \left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + 2x\right)\Bigg|_0^9 = \left(\frac{2}{3}\sqrt{x^3} + 2x\right)\Bigg|_0^9 =$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{9^3} + 2\cdot 9 - \left(\frac{2}{3}\sqrt{0^3} + 2\cdot 0\right) =$$

$$= \frac{2}{3}\cdot 9\sqrt{9} + 18 - 0 = 6\cdot 3 + 18 = 36.$$

Atsakymas. 36.

7c. Apskaičiuokite integralą $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x - \sin(3x)}{\cos(2x)}\,\mathrm{d}x$.

> $\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$,
> $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$

Pertvarkome pointegralinį reiškinį:

$$\frac{\sin x - \sin(3x)}{\cos(2x)} = \frac{2\sin\frac{x-3x}{2}\cos\frac{x+3x}{2}}{\cos(2x)} = \frac{2\sin(-x)\cos(2x)}{\cos(2x)} = 2\sin(-x) =$$

$$= -2\sin x.$$

Vadinasi,

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x - \sin(3x)}{\cos(2x)}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{3}} -2\sin x\,\mathrm{d}x.$$

> $\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + C$

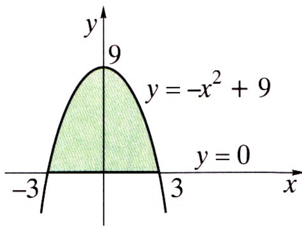
Integruojame:

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} -2\sin x \,\mathrm{d}x = (2\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = 2\cdot\cos\frac{\pi}{3} - 2\cdot\cos 0 = 2\cdot\frac{1}{2} - 2\cdot 1 = 1 - 2 = -1.$$

Atsakymas. -1.

8a. Apskaičiuokite plotą figūros, apribotos kreivėmis $y = 9 - x^2$, $y = 0$.

Nubraižykime brėžinuką ($y = -x^2 + 9$ — parabolė, $y = 0$ — Ox ašis):



Parabolė kerta Ox ašį:
$-x^2 + 9 = 0,\quad x^2 = 9,$
$x_1 = -3,\ x_2 = 3.$

Ieškomas plotas lygus $\int_{-3}^{3} \left(-x^2 + 9\right) \mathrm{d}x$ (arba $2\int_0^3 \left(-x^2 - 9\right) \mathrm{d}x$). Skaičiuojame:

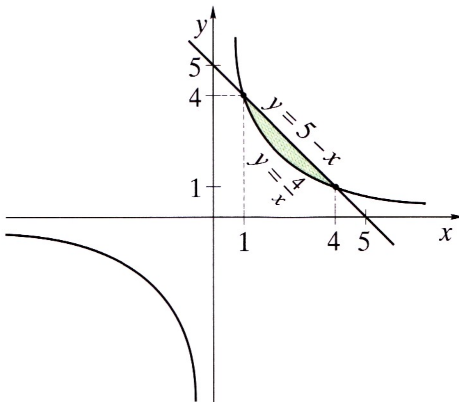
$$\int_{-3}^{3} \left(-x^2 + 9\right) \mathrm{d}x = \left(-\frac{x^3}{3} + 9x\right)\Big|_{-3}^{3} =$$

$$= -\frac{3^3}{3} + 9\cdot 3 - \left(-\frac{(-3)^3}{3} + 9\cdot(-3)\right) =$$
$$= -3^2 + 27 - \left(3^2 - 27\right) = -9 + 27 - 9 + 27 = 36.$$

Atsakymas. 36.

8b. Apskaičiuokite plotą figūros, apribotos kreivėmis $y = \frac{4}{x}$, $y = 5 - x$.

Nusibraižykime brėžinuką ($y = \frac{4}{x}$ — hiperbolė, $y = 5 - x$ — tiesė):



Hiperbolė ir tiesė kertasi taškuose:
$\frac{4}{x} = 5 - x \mid \cdot x,$
$4 = 5x - x^2,$
$x^2 - 5x + 4 = 0,$
$x_1 = 1,\ x_2 = 4.$

Ieškomas plotas lygus

$$\int_1^4 (5-x)\,dx - \int_1^4 \frac{4}{x}\,dx.$$

$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$

Skaičiuojame:

$$\int_1^4 (5-x)\,dx - \int_1^4 \frac{4}{x}\,dx = \int_1^4 \left(5-x-\frac{4}{x}\right)dx = \left(5x-\frac{x^2}{2}-4\ln|x|\right)\Bigg|_1^4 =$$

$$= 5\cdot 4 - \frac{4^2}{2} - 4\ln|4| - 5\cdot 1 + \frac{1^2}{2} + 4\ln|1| =$$

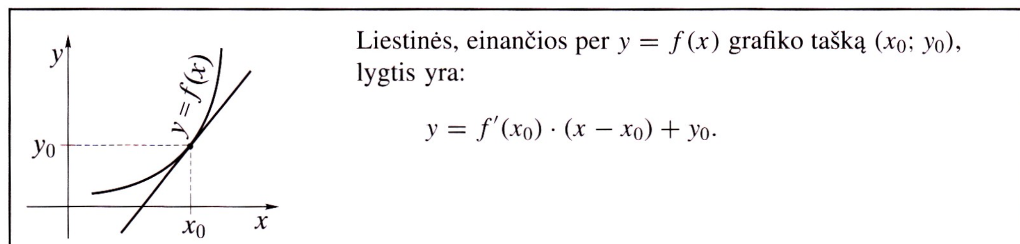
$$= 20 - \frac{16}{2} - 4\ln 4 - 5 + \frac{1}{2} + 4\cdot 0 =$$

$$= 15\frac{1}{2} - 8 - 4\ln 4 = 7\frac{1}{2} - 4\ln 4.$$

Atsakymas. $7\frac{1}{2} - 4\ln 4$.

9. Apskaičiuokite plotą figūros, apribotos parabole $y = x^2 - 2x + 2$, šios parabolės liestine, nubrėžta per tašką (3; 5), ir tiesėmis $x = 0$, $y = 0$.

Raskime liestinės (tiesės) lygtį.



Liestinės, einančios per $y = f(x)$ grafiko tašką $(x_0; y_0)$, lygtis yra:

$$y = f'(x_0)\cdot(x - x_0) + y_0.$$

Randame funkcijos $f(x) = x^2 - 2x + 2$ išvestinę:

$$f'(x) = 2x - 2.$$

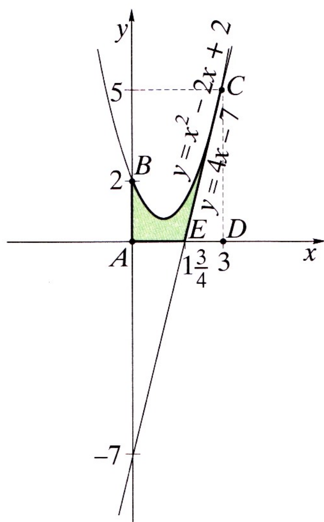
Apskaičiuojame $f'(3)$:

$$f'(3) = 2\cdot 3 - 2 = 4.$$

Vadinasi, liestinės lygtis yra:

$$y = 4\cdot(x-3) + 5,$$
$$y = 4x - 12 + 5,$$
$$y = 4x - 7.$$

Nusibraižykime brėžinuką.



$y = x^2 - 2x + 2$ — parabolė,
$y = 4x - 7$ — tiesė,
$x = 0$ — tiesė (Oy ašis),
$y = 0$ — tiesė (Ox ašis).
Tiesė $y = 4x - 7$ Ox ašį kerta taške:
$4x - 7 = 0$, $x = \frac{7}{4}$.
Ieškomas plotas lygus:

$$\int_0^3 (x^2 - 2x + 2)\,dx - \int_{1\frac{3}{4}}^3 (4x - 7)\,dx.$$

$\int_0^3 (x^2 - 2x + 2)\,dx$ reiškia kreivinės trapecijos $ABCD$ plotą, o $\int_{1\frac{3}{4}}^3 (4x - 7)\,dx$ — $\triangle EDC$ plotą.

Apskaičiuojame integralą

$$\int_0^3 (x^2 - 2x + 2)\,dx = \left(\frac{x^3}{3} - x^2 + 2x\right)\Big|_0^3 =$$

$$= \frac{3^3}{3} - 3^2 + 2 \cdot 3 - \frac{0^3}{3} + 0^2 + 2 \cdot 0 = 9 - 9 + 6 = 6.$$

Integralo

$$\int_{1\frac{3}{4}}^3 (4x - 7)\,dx$$

reikšmė lygi stačiojo $\triangle EDC$ plotui.
Todėl galima neskaičiuoti integralo reikšmės, o rasti to trikampio plotą. Trikampio EDC statinių ilgiai:

$$DC = 5, \quad DE = 3 - 1\frac{3}{4} = 1\frac{1}{4}.$$

Trikampio plotas:

$$S_{EDC} = \frac{DC \cdot DE}{2} = \frac{5 \cdot \frac{5}{4}}{2} = \frac{25}{8}.$$

Taigi, ieškomas plotas lygus

$$6 - \frac{25}{8} = 6 - 3\frac{1}{8} = 2\frac{7}{8}.$$

Atsakymas. $2\frac{7}{8}$.

10a. Grupėje yra 3 vaikinai ir 2 merginos. Burtų keliu reikia išrinkti 2 jaunuolius dalyvauti varžybose. Kokia tikimybė, kad tarp išrinktųjų bus 1 vaikinas ir 1 mergina?

Surašykime jaunuolius, juos sunumeruodami (v — vaikinai, m — merginos):

$$v_1, v_2, v_3, m_1, m_2.$$

Visos galimos poros:

$$v_1v_2,\ v_1v_3,\ v_1m_1,\ v_1m_2;$$
$$v_2v_3,\ v_2m_1,\ v_2m_2;$$
$$v_3m_1,\ v_3m_2;$$
$$m_1m_2.$$

Iš viso yra 10 skirtingų porų, tarp kurių yra 6 poros vaikino ir merginos.
Vadinasi, tikimybė paimti vieną vaikiną ir vieną merginą lygi

$$\frac{6}{10} = \frac{3}{5}.$$

Galvoti galima ir taip.
Tikimybė, kad pirmas paimtas bus vaikinas, lygi

$$\frac{3}{5}.$$

Iš likusių 4 jaunuolių 2 yra vaikinai ir 2 merginos. Iš tų keturių tikimybė paimti merginą lygi

$$\frac{2}{4}.$$

Surastųjų tikimybių sandauga

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4}$$

reiškia porą $(v; m)$. Bet tai nėra atsakymas.
Reikia apskaičiuoti ir poros $(m; v)$ tikimybę. Tikimybė, kad pirmoji bus mergina, lygi $\frac{2}{5}$.
Tikimybė, kad iš likusių 4 jaunuolių (3 vaikinai ir 1 mergina) bus paimtas vaikinas, lygi $\frac{3}{4}$.
Sandauga

$$\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4}$$

reiškia tikimybę paimti porą $(m; v)$.
Atsakymas bus porų

$$(v; m) \quad \text{ir} \quad (m; v)$$

tikimybių suma:

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{6}{20} + \frac{6}{20} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}.$$

Šį atsakymą galima gauti ir remiantis derinių formule.
Paimti 2 jaunuolius iš 5 yra C_5^2 skirtingų būdų.
Paimti vaikiną ir merginą yra $C_3^1 \cdot C_2^1$ skirtingų būdų.
Ieškomoji tikimybė lygi

$$\frac{C_3^1 \cdot C_2^1}{C_5^2} = \frac{3 \cdot 2}{\frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1}} = \frac{3}{5}.$$

Atsakymas. $\frac{3}{5}$.

10b. Tikimybė, kad optikos salone žmogus galės įsigyti tinkamus akinius, lygi 0,4. Mieste yra 3 optikos salonai. Žmogus eina į salonus tol, kol randa tinkamus akinius. Atsitiktinis dydis X — žmogaus aplankytų salonų skaičius. Sudarykite atsitiktinio dydžio X skirstinį ir apskaičiuokite jo matematinę viltį $\mathbf{E}X$.

Sudaryti skirstinį — reiškia rasti tikimybes įvykių:
- aplankė vieną saloną (rado akinius pirmajame),
- aplankė du salonus (rado akinius antrajame),
- aplankė tris salonus.

Tikimybė, kad aplankys vieną saloną (pirmajame salone ras tinkamus akinius), lygi 0,4; tikimybė, kad aplankys du salonus (pirmame neras, o antrame ras) lygi

$$\underset{\substack{\uparrow\\\text{tikimybė}\\\text{nerasti}}}{(1 - 0{,}4)} \cdot \underset{\substack{\uparrow\\\text{tikimybė}\\\text{rasti}}}{0{,}4} = 0{,}6 \cdot 0{,}4 = 0{,}24$$

Tikimybė, kad aplankys tris salonus (pirmajame neras ir antrajame neras), lygi

$$(1 - 0{,}4) \cdot (1 - 0{,}4) = 0{,}6 \cdot 0{,}6 = 0{,}36.$$

Pažymėkime aplankytus salonus skaičiais 1, 2, 3 ir sudarykime atsitiktinio dydžio X — aplankytų salonų skaičiaus skirstinį.

$m =$	1	2	3
$\mathbf{P}(X = m) =$	0,4	0,24	0,36

Ar neapsirikta, verta pasitikrinti — atsitiktinio dydžio reikšmių tikimybių suma turi būti lygi 1:

$$0{,}4 + 0{,}24 + 0{,}36 = 1.$$

Beje, tikimybė, kad akinius ras trečiajame salone, lygi

$$(1 - 0{,}4) \cdot (1 - 0{,}4) \cdot 0{,}4 = 0{,}6 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4 = 0{,}144.$$

(Bet šito uždavinys neklausia.)
Atsitiktinio dydžio matematinė viltis lygi to dydžio reikšmes atitinkančių tikimybių sandaugų sumai, t. y. skaičiui:

$$1 \cdot 0{,}4 + 2 \cdot 0{,}24 + 3 \cdot 0{,}36 = 0{,}4 + 0{,}48 + 1{,}08 = 1{,}96.$$

Atsakymas.

$m =$	1	2	3
$\mathbf{P}(X = m) =$	0,4	0,24	0,36

$\mathbf{E}X = 1{,}96.$

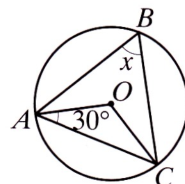
Kartojimas

K20 (14–16)

1. Remdamiesi brėžiniu, apskaičiuokite $\cos x + \sin x$.

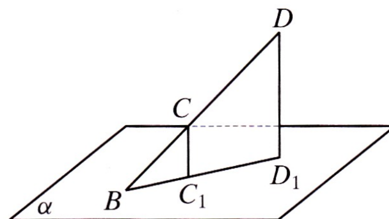
A 1,4
B 7
C 1
D $\frac{4}{3}$
E $\frac{3}{4}$

2. Pavaizduotas apskritimas su centru O, $\angle OAC = 30^\circ$. Apskaičiuokite kampo x dydį.



A 70° B 60° C 50° D 120° E 30°

3. Jei $CC_1 \parallel DD_1$, $BC : CD = 3 : 4$, $CC_1 = 21$, tai $DD_1 =$



A 63 B 27 C 49 D 18 E 108

4. Vektorių $\vec{a}(-1; 2)$ ir $\vec{b}(0; -1)$ skaliarinė sandauga lygi:

A -3 B 0 C -2 D 1 E 1,5

5. Stačiakampio gretasienio, kurio matmenys yra $3 \times 2{,}5 \times 4$, įstrižainės ilgis yra:

A 6 B $\frac{5\sqrt{5}}{2}$ C $5\sqrt{5}$ D 10 E $20\sqrt{5}$

6. a) Dviejų trikampio kraštinių ilgiai yra 14 cm ir 15 cm, o smailiojo kampo tarp šių kraštinių sinusas lygus 0,8. Apskaičiuokite trikampio perimetrą.

b) Apie apskritimą, kurio spindulio ilgis yra 5, apibrėžta lygiašonė trapecija, kurios ilgesniojo pagrindo ilgis yra 20. Apskaičiuokite trapecijos aukštinės ir trumpesniojo pagrindo ilgius, plotą, perimetrą.

c) Per stačiakampio $ABCD$ įstrižainių susikirtimo tašką O nubrėžta tiesė, kertanti kraštinę BC taške P, o kraštinę AD — taške K.
1) Įrodykite, kad keturkampis $APCK$ — lygiagretainis.
2) Apskaičiuokite lygiagretainio $APCK$ plotą, jei $AK = 4$, $KD = 8$, $AC = 13$.
3) Apskaičiuokite atkarpos PK ilgį.
4) Apskaičiuokite kampo AOK sinusą.

7. a) Į taisyklingąją trikampę piramidę, kurios pagrindo kraštinės ilgis yra $4\sqrt{3}$, o šoninė siena su pagrindo plokštuma sudaro 60° kampą, įbrėžtas kūgis. Apskaičiuokite:
1) piramidės pagrindo plotą;
2) kūgio pagrindo plotą;
3) piramidės aukštinės ilgį;
4) piramidės ir kūgio tūrių santykį.

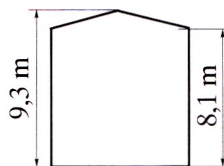
b) Piramidės pagrindas — statusis trikampis, kurio statinių ilgiai yra 7 ir 24. Per šio trikampio statinius einančios piramidės sienos yra statmenos pagrindo plokštumai, o trečioji siena su ja sudaro 60° kampą. Apskaičiuokite piramidės aukštinės ilgį.

c) Taisyklingosios keturkampės piramidės pagrindo kraštinė lygi a, o šoninė briauna į pagrindo plokštumą pasvirusi kampu α. Per pagrindo įstrižainę lygiagrečiai šoninei briaunai nubrėžta plokštuma. Apskaičiuokite pjūvio plotą.

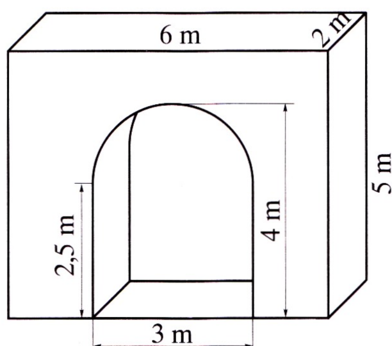
8. a) Lygiašonė trapecija, kurios plotas lygus 420, o šoninės kraštinės ilgis yra 17, sukama apie aukštinę, nubrėžtą per pagrindų vidurio taškus. Gauto sukinio pjūvio, einančio per aukštinės vidurį ir lygiagretaus pagrindams, plotas lygus 196π. Apskaičiuokite:
1) pjūvio spindulio ilgį;
2) sukinio šoninio paviršiaus plotą;
3) sukinio tūrį.

b) Ritinio aukštinės ilgis yra 2 dm, o pagrindo skersmens ilgis yra 1 dm. Ar galima į šį ritinį įdėti rutulį, kurio tūris du kartus mažesnis už ritinio tūrį? Atsakymą pagrįskite.

9. a) Silosas supiltas į 6,8 m skersmens ritinio formos bokštą, kurio ašinis pjūvis pavaizduotas brėžinyje (bokšto viršus kūgio formos). 1 m^3 siloso masė lygi 0,55 t. Ar tilps tokiame bokšte 170 t siloso?



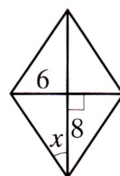
b) Reikia išmūryti arką, kurios brėžinys ir matmenys pavaizduoti paveiksle. Ar užteks 16 000 plytų šiai arkai išmūryti, jeigu 1 m^3 mūro reikia 400 plytų?



10. a) Su kuriomis p reikšmėmis vektoriai $\vec{a}(2p; p; 1)$ ir $\vec{b}(2p; 7; -2)$ yra statmeni?

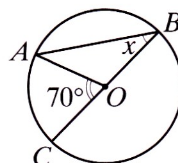
b) Raskite kampo tarp vektorių $\vec{a}+\vec{b}$ ir $\vec{a}-\vec{b}$ kosinusą, kai $\vec{a}(0; -1; 2)$ ir $\vec{b}(2; 1; 2)$.

1. Remdamiesi brėžiniu, apskaičiuokite $\sin(2x)$.



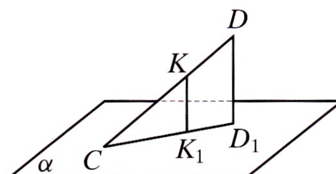
A $\frac{24}{25}$
B $\frac{48}{\sqrt{7}}$
C $\frac{14}{25}$
D $\frac{6}{5}$
E $\frac{4}{5}$

2. Pavaizduotas apskritimas su centru O, BC — apskritimo skersmuo, $\angle AOC = 70^\circ$. Apskaičiuokite kampo x dydį.



A 45° **B** 55° **C** 70° **D** 35° **E** 60°

3. Jei $KK_1 \parallel DD_1$, $CK : KK_1 = 10 : 7$, $CD = 15$, tai $DD_1 =$



A 12 **B** 10 **C** 10,5 **D** 24 **E** 35

4. Vektorių $\vec{m}(-3; 6)$ ir $\vec{n}(4; 2)$ skaliarinė sandauga lygi:

A 0 **B** -2 **C** 4 **D** $\frac{3}{4}$ **E** 1

5. Stačiakampio gretasienio, kurio matmenys yra $2 \times 4 \times 5$, įstrižainės ilgis yra:

A 10 **B** 20 **C** $3\sqrt{5}$ **D** $\frac{10\sqrt{5}}{3}$ **E** $27\sqrt{3}$

6. a) Dviejų trikampio kraštinių ilgiai yra 10 cm ir 16 cm, o smailiojo kampo tarp šių kraštinių sinusas lygus 0,6. Apskaičiuokite trikampio perimetrą.

b) Per lygiagretainio $ABCD$ įstrižainės BD vidurio tašką O statmenai jai nubrėžta tiesė, kertanti kraštinę BC taške M, o kraštinę AD — taške F. Žinoma, kad $BD = 8$, $MF = 6$, $AF = 5$.
1) Įrodykite, kad keturkampis $BMDF$ — rombas.
2) Apskaičiuokite į rombą $BMDF$ įbrėžto apskritimo spindulio ilgį.
3) Apskaičiuokite kampo ODF kosinusą.
4) Apskaičiuokite lygiagretainio $ABCD$ perimetrą.

c) Lygiašonės trapecijos pagrindų ilgiai yra 12 ir 20. Apie šią trapeciją apibrėžto apskritimo centras yra ilgesniajame trapecijos pagrinde. Apskaičiuokite trapecijos: 1) aukštinės ilgį; 2) šoninės kraštinės ilgį; 3) plotą; 4) perimetrą.

7. a) Apie taisyklingąją keturkampę piramidę, kurios pagrindo kraštinės ilgis yra $3\sqrt{6}$, o priešingųjų šoninių briaunų sudaromas kampas lygus 120°, apibrėžtas kūgis. Apskaičiuokite:
1) piramidės pagrindo plotą;
2) kūgio pagrindo plotą;
3) kūgio aukštinės ilgį;
4) piramidės ir kūgio tūrių santykį.

b) Piramidės pagrindas — statusis trikampis, kurio statinių ilgiai 6 ir 8. Per šio trikampio statinius einančios piramidės sienos yra statmenos pagrindo plokštumai. Pasviroji šoninė siena su pagrindo plokštuma sudaro 30° kampą. Apskaičiuokite piramidės aukštinės ilgį.

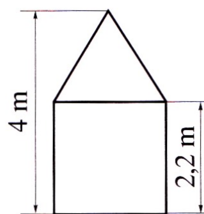
c) Taisyklingosios keturkampės piramidės šoninė briauna lygi b ir į pagrindo plokštumą pasvirusi kampu α. Per pagrindo įstrižainę lygiagrečiai šoninei briaunai nubrėžta plokštuma. Apskaičiuokite pjūvio plotą.

8. a) Ritinio ašinis pjūvis — kvadratas, kurio kraštinės ilgis yra 2 cm. Ar galima į šį ritinį įdėti rutulį, kurio tūris du kartus mažesnis už ritinio tūrį? Atsakymą pagrįskite.

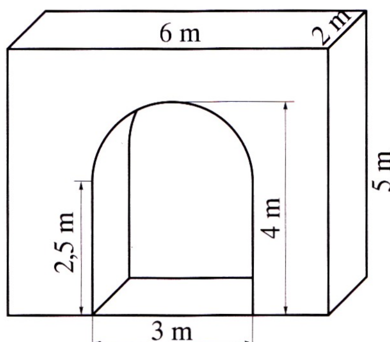
b) Nupjautinio kūgio tūris lygus 2800π, aukštinės ilgis yra 12, o vidurinio pjūvio, lygiagretaus pagrindams, plotas lygus 225π. Apskaičiuokite:

1) vidurinio pjūvio skersmens ilgį;
2) nupjautinio kūgio pagrindų spindulių ilgius;
3) figūros šoninio paviršiaus plotą.

9. a) Šienas sukrautas į 5 m skersmens ritinio su kūgišku viršumi formos kupetą, kurios ašinis pjūvis pavaizduotas brėžinyje. Šieno tankis yra $30\,\text{kg/m}^3$. Ar gali šis šienas sverti 2 t?



b) Reikia išmūryti arką, kurios brėžinys ir matmenys pavaizduoti paveiksle. Ar užteks 15 000 plytų šiai arkai išmūryti, jeigu $1\,\text{m}^3$ mūro reikia 400 plytų?



10. a) Su kuriomis t reikšmėmis vektoriai $\vec{a}(t;\ -5;\ -3)$ ir $\vec{b}(2t;\ t;\ 1)$ yra statmeni?

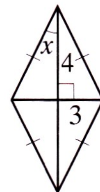
b) Raskite kampo tarp vektoriaus $\vec{a}(1;\ \sqrt{2};\ 1)$ ir Ox ašies dydį.

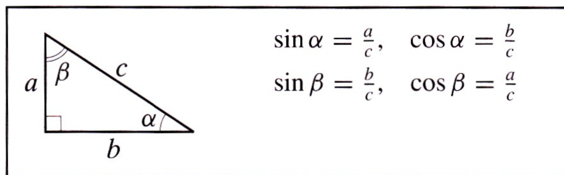
Kartojimas

K20 (14–16)

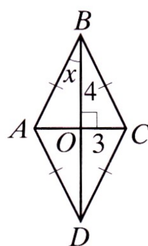
1. Remdamiesi brėžiniu, apskaičiuokite $\cos x + \sin x$.

A 1,4
B 7
C 1
D $\frac{4}{3}$
E $\frac{3}{4}$





$\sin\alpha = \frac{a}{c}$, $\cos\alpha = \frac{b}{c}$
$\sin\beta = \frac{b}{c}$, $\cos\beta = \frac{a}{c}$



$ABCD$ — rombas, nes kraštinės yra lygios.

Rombo įstrižainės jo kampus dalija pusiau.

$\angle ABO = \angle CBO = x$.

Apskaičiuojame $\triangle BOC$ įžambinę: $BC = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$.

Skaičiuojame $\angle OBC = x$ sinuso ir kosinuso reikšmes:

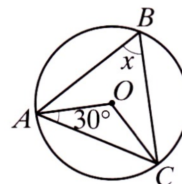
$$\sin x = \frac{OC}{BC} = \frac{3}{5}, \quad \cos x = \frac{OB}{BC} = \frac{4}{5}.$$

Apskaičiuojame gautų reikšmių sumą: $\sin x + \cos x = \frac{3}{5} + \frac{4}{5} = \frac{7}{5} = 1{,}4$.

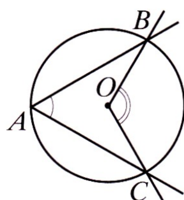
Atsakymas. **A**

2. Pavaizduotas apskritimas su centru O, $\angle OAC = 30°$. Apskaičiuokite kampo x dydį.

A 70° **B** 60° **C** 50° **D** 120° **E** 30°



$\angle ABC$ — įbrėžtinis, $\angle AOC$ — centrinis. Šie abu kampai remiasi į tą patį lanką AC.



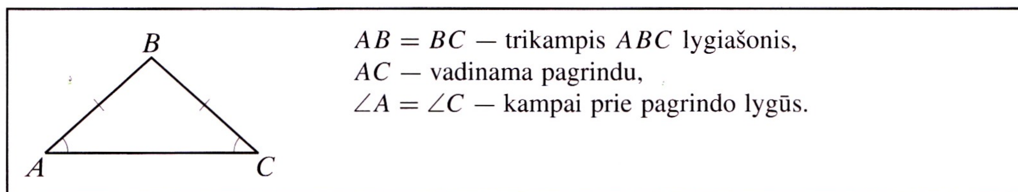
O — apskritimo centras,
$\angle BAC$ — įbrėžtinis (A yra ant apskritimo; AB, AC — kerta apskritimą),
$\angle BOC$ — centrinis.

Įbrėžtinio kampo dydis lygus pusei centrinio kampo, kuris remiasi į tą patį lanką:

$$\angle BAC = \frac{\angle BOC}{2}.$$

Vadinasi, $\angle B = \frac{\angle O}{2}$.

Trikampis AOC — lygiašonis ($OA = OC$, kaip apskritimo spinduliai).



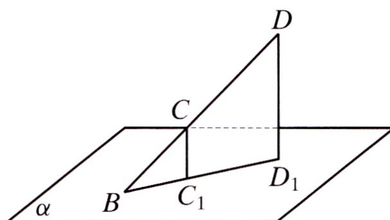
$AB = BC$ — trikampis ABC lygiašonis,
AC — vadinama pagrindu,
$\angle A = \angle C$ — kampai prie pagrindo lygūs.

Vadinasi, $\angle OCA = \angle OAC = 30^\circ$; $\angle AOC = 180^\circ - 30^\circ - 30^\circ = 120^\circ$.
Ieškomas kampas lygus pusei $\angle AOC$, t. y. $\angle x = \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ$.

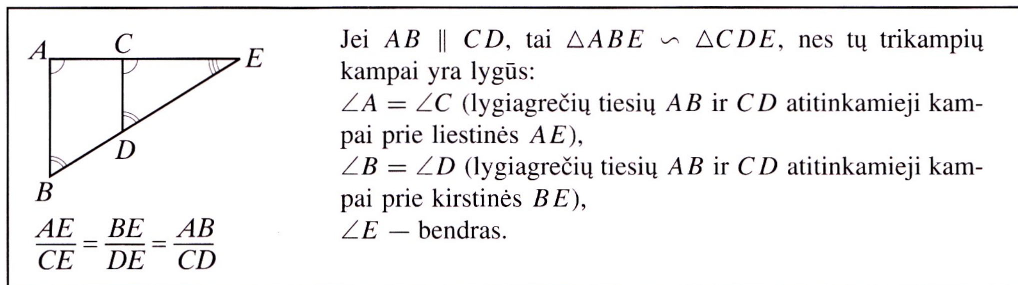
Atsakymas. **B.**

3. Jei $CC_1 \parallel DD_1$, $BC : CD = 3 : 4$, $CC_1 = 21$, tai $DD_1 =$

A 63 **B** 27 **C** 49 **D** 18 **E** 108

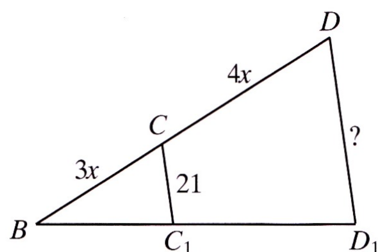


Kadangi $CC_1 \parallel DD_1$, tai trikampiai DBD_1 ir CBC_1 yra panašūs ($\triangle DBD_1 \backsim \triangle CBC_1$).



Jei $AB \parallel CD$, tai $\triangle ABE \backsim \triangle CDE$, nes tų trikampių kampai yra lygūs:
$\angle A = \angle C$ (lygiagrečių tiesių AB ir CD atitinkamieji kampai prie liestinės AE),
$\angle B = \angle D$ (lygiagrečių tiesių AB ir CD atitinkamieji kampai prie kirstinės BE),
$\angle E$ — bendras.

Panašiųjų trikampių atitinkamų kraštinių ilgių santykiai yra vienodi.



BC pažymėkime $3x$, tai $CD = 4x$.

$$BC + CD = 3x + 4x = 7x.$$

$$\frac{DB}{CB} = \frac{DD_1}{CC_1}, \quad \frac{7x}{3x} = \frac{DD_1}{21},$$

$$\frac{DD_1}{21} = \frac{7}{3}, \quad DD_1 = \frac{7}{3} \cdot 21, \quad DD_1 = 49.$$

Atsakymas. **C.**

4. Vektorių $\vec{a}(-1; 2)$ ir $\vec{b}(0; -1)$ skaliarinė sandauga lygi:

A -3 **B** 0 **C** -2 **D** 1 **E** 1,5

Vektorių $\vec{a}(x_1; y_1)$ ir $\vec{b}(x_2; y_2)$ skaliarinė sandauga $\vec{a} \cdot \vec{b}$ lygi skaičiui

$$x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2.$$

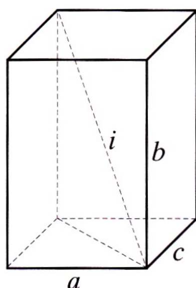
Vektorių $\vec{a}(-1; 2)$ ir $\vec{b}(0; -1)$ skaliarinė sandauga lygi vektorių atitinkamų koordinačių sandaugų sumai:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = -1 \cdot 0 + 2 \cdot (-1) = 0 - 2 = -2.$$

Atsakymas. **C**.

5. Stačiakampio gretasienio, kurio matmenys yra $3 \times 2{,}5 \times 4$, įstrižainės ilgis yra:

A 6 **B** $\frac{5\sqrt{5}}{2}$ **C** $5\sqrt{5}$ **D** 10 **E** $20\sqrt{5}$



Stačiakampio gretasienio visos sienos yra stačiakampiai,
$a \times b \times c$ — stačiakampio gretasienio matmenys,
i — stačiakampio gretasienio įstrižainė,

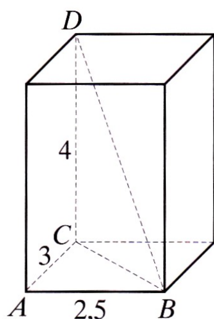
$$i^2 = a^2 + b^2 + c^2, \quad i = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Įstrižainės kvadratas lygus matmenų kvadratų sumai.

I būdas. Apskaičiuokime įstrižainės ilgį, remdamiesi formule $i = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$:

$$i = \sqrt{3^2 + 2{,}5^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 6{,}25 + 16} = \sqrt{31{,}25}.$$

II būdas. Įstrižainės ilgį galima apskaičiuoti ir du kartus taikant Pitagoro teoremą:



$\triangle CAB$: $CB^2 = AC^2 + AB^2 = 3^2 + 2{,}5^2$,
$\triangle DCB$: $DB^2 = DC^2 + CB^2 = 4^2 + 3^2 + 2{,}5^2$,
$DB^2 = 16 + 9 + 6{,}25 = 31{,}25$,
$DB = \sqrt{31{,}25}$.

Teisingą atsakymą atsirinksime dešimtainę trupmeną 31,25 pavertę paprastąja:

$$31{,}25 = \frac{3125}{100} = \frac{625}{20} = \frac{125}{4}, \quad \sqrt{\frac{125}{4}} = \sqrt{\frac{25 \cdot 5}{4}} = \frac{5\sqrt{5}}{2}.$$

Atsakymas. **B**.

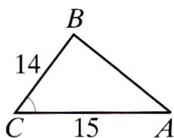
6a. Dviejų trikampio kraštinių ilgiai yra 14 cm ir 15 cm, o smailiojo kampo tarp šių kraštinių sinusas lygus 0,8. Apskaičiuokite trikampio perimetrą.

Kosinusų teorema:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$



Duota: $BC = 14$ cm, $AC = 15$ cm, $\sin\angle C = 0{,}8$.
Rasti: P_{ABC}.

Reikia rasti AB ilgį. Remkimės kosinusų teorema:

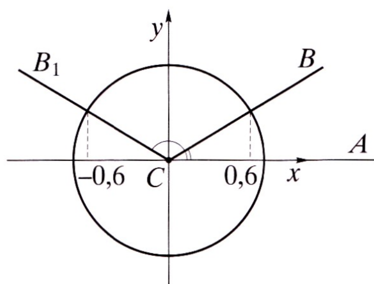
$$AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2\cdot BC\cdot AC\cdot\cos\angle C = 14^2 + 15^2 - 2\cdot 14\cdot 15\cdot\cos\angle C =$$
$$= 196 + 225 - 420\cdot\cos\angle C = 421 - 420\cos\angle C.$$

$\cos\angle C$ reikšmę rasime remdamiesi pagrindine trigonometrijos tapatybe:

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$$0{,}8^2 + \cos^2\angle C = 1, \quad \cos^2\angle C = 1 - 0{,}64,$$
$$\cos^2\angle C = 0{,}36, \quad \cos\angle C = -0{,}6 \quad \text{arba} \quad \cos\angle C = 0{,}6.$$

Gavome dvi kampo C kosinuso reikšmes.



Pagal kampo kosinuso apibrėžimą:
$\cos\angle BCA = 0{,}6 \Rightarrow \angle BCA$ smailus,
$\cos\angle B_1CA = -0{,}6 \Rightarrow \angle B_1CA$ bukas.

Sąlygoje nurodyta, kad $\angle C$ smailus. Vadinasi, $\cos\angle C = 0{,}6$.
Grįžtame prie lygybės

$$AB^2 = 421 - 420\cdot\cos\angle C.$$

Apskaičiuojame AB:

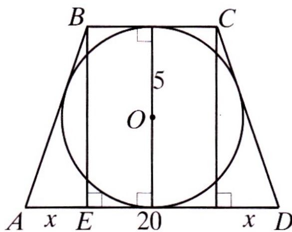
$$AB^2 = 421 - 420\cdot 0{,}6 = 421 - 252 = 169, \quad AB = \sqrt{169} = 13\ (\text{cm}).$$

Trikampis su kraštinėmis 13, 14 ir 15 egzistuoja $(13 + 14 > 15)$. To trikampio perimetras

$$AB + BC + AC = 13 + 14 + 15 = 42\ (\text{cm}).$$

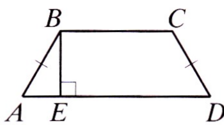
Atsakymas. 42 cm.

6b. Apie apskritimą, kurio spindulio ilgis yra 5, apibrėžta lygiašonė trapecija, kurios ilgesniojo pagrindo ilgis yra 20. Apskaičiuokite trapecijos aukštinės ir trumpesniojo pagrindo ilgius, plotą, perimetrą.



Duota: $ABCD$ — trapecija, $AB = CD$, $AD = 20$,
O — įbrėžtinio apskritimo centras, $r = 5$.
Rasti: BE, BC, S_{ABCD}, P_{ABCD}.

Trapecija, kurios šoninės kraštinės yra lygios, vadinama *lygiašone*.



$AB = CD$, $AB \not\parallel CD$, $BC \parallel AD$;
AB, CD — šoninės kraštinės;
BC, AD — pagrindai,
BE — aukštinė.

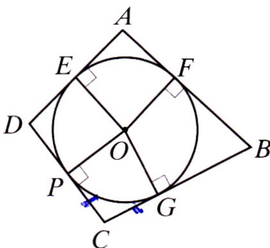
Lygiašonės trapecijos kampai prie to paties pagrindo yra lygūs:

$$\angle A = \angle D, \quad \angle B = \angle C; \quad \angle A + \angle B = \angle D + \angle C = 180^\circ.$$

Trapecijos plotas lygus pagrindų sumos ir aukštinės sandaugos pusei.

$$S_{ABCD} = \frac{AD + BC}{2} \cdot BE.$$

Apskritimas, kuris liečia visas keturkampio kraštines, vadinamas *įbrėžtiniu* apskritimu.



O — įbrėžtinio apskritimo centras,
$OE = OF = OG = OP$ — apskritimo spindulys.
Apibrėžto apie apskritimą keturkampio priešingų kraštinių ilgių sumos yra lygios

$$AB + CD = AD + BC.$$

Apskritimo spindulys, nubrėžtas į lietimosi tašką, yra statmenas liestinei:

$$OE \perp AD, \; OF \perp AB, \; OG \perp BC, \; OP \perp CD.$$

Atstumai nuo keturkampio viršūnės iki lietimosi taškų yra lygūs:

$$AE = AF, \; BF = BG, \; CG = CP, \; DE = DP.$$

Akivaizdu, kad trapecijos aukštinė dvigubai ilgesnė už spindulį: $BE = 2r = 2 \cdot 5 = 10$. Nagrinėkime statųjį trikampį ABE. Pažymėkime $AE = x$. Pagal Pitagoro teoremą:

$$AB = \sqrt{10^2 + x^2} = \sqrt{100 + x^2}.$$

Be to $AB = CD = \sqrt{100 + x^2}$.

Akivaizdu, kad $BC = 20 - 2 \cdot x$.
Apibrėžtinio keturkampio priešingų kraštinių ilgių sumos yra lygios:

$$AB + CD = BC + AD, \quad 2 \cdot \sqrt{100 + x^2} = 20 + 20 - 2x.$$

Sprendžiame šią lygtį:

$$2\sqrt{100 + x^2} = 40 - 2x, \quad \sqrt{100 + x^2} = 20 - x \mid \uparrow^2,$$
$$100 + x^2 = (20 - x)^2, \quad 100 + x^2 = 400 - 40x + x^2,$$
$$40x = 300, \quad x = 7{,}5.$$

Vadinasi,

$$AB = \sqrt{100 + 7{,}5^2} = \sqrt{156{,}25} = 12{,}5, \qquad BC = 20 - 2 \cdot 7{,}5 = 5.$$

Belieka apskaičiuoti trapecijos perimetrą ir plotą:

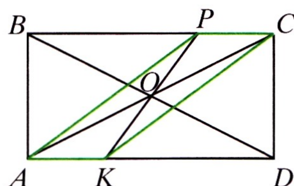
$$P_{ABCD} = 2 \cdot AB + BC + AD = 2 \cdot 12{,}5 + 5 + 20 = 50 \text{ (ilg.v.)},$$
$$S_{ABCD} = \frac{BC + AD}{2} \cdot BE = \frac{5 + 20}{2} \cdot 10 = 125 \text{ (kv.v.)}.$$

Pastaba. Galėjome šoninės kraštinės ilgio ir neieškoti. Kadangi $2AB = BC + AD$, tai

$$P_{ABCD} = 2 \cdot (BC + AD).$$

Atsakymas. $BE = 10$, $BC = 5$, $P = 50$, $S = 125$.

6c. Per stačiakampio $ABCD$ įstrižainių susikirtimo tašką O nubrėžta tiesė, kertanti kraštinę BC taške P, o kraštinę AD — taške K.
1) Įrodykite, kad keturkampis $APCK$ — lygiagretainis.
2) Apskaičiuokite lygiagretainio $APCK$ plotą, jei $AK = 4$, $KD = 8$, $AC = 13$.
3) Apskaičiuokite atkarpos PK ilgį.
4) Apskaičiuokite kampo AOK sinusą.



Duota: $ABCD$ — stačiakampis,
O — įstrižainių susikirtimo taškas,
POK — tiesė.

1) Keturkampio $APCK$ kraštinės PC ir AK yra lygiagrečios (nes stačiakampio kraštinės BC ir AD lygiagrečios). Reikia įrodyti, kad lygiagrečios ir kitos dvi kraštinės, t. y. $AP \parallel KC$.

Keturkampis, kurio priešingosios kraštinės yra lygiagrečios, vadinamas lygiagretainiu.

Nagrinėkime trikampius OPC ir OKA. Šie trikampiai yra lygūs, nes:

$\angle POC = \angle AOK$ (kryžminiai),
$\angle OAK = \angle OCP$ (lygiagrečių tiesių BC ir AD priešiniai kampai prie kirstinės AC).
$AO = OC$ (stačiakampio įstrižainės susikirsdamos dalija viena kitą pusiau).

Vadinasi, $\triangle OPC = \triangle OKA$ (pagal kraštinę ir du kampus prie jos: $OC = OA$, $\angle O = \angle O$, $\angle A = \angle C$). O tai reiškia, kad

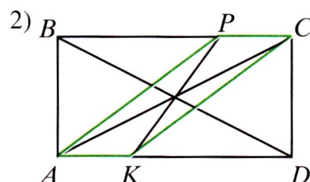
$$AK = PC, \quad OP = OK.$$

- Jei keturkampio dvi kraštinės yra lygiagrečios ir lygios, tai tas keturkampis yra lygiagretainis.
- Jei keturkampio įstrižainės susikirsdamos dalija viena kitą pusiau, tai tas keturkampis yra lygiagretainis.

Vadinasi, keturkampis $APCK$ yra lygiagretainis. Iš tikrųjų:

$$PC \parallel AK \text{ (nes } BC \parallel AD) \quad \text{ir} \quad PC = AK, \quad \text{todėl } AP \parallel KC.$$

Galėjome remtis ir lygybe $OP = OK$.
Kadangi $OA = OC$ ir $OP = OK$, tai $APCK$ — lygiagretainis.

2) 

Duota: $AK = 4$, $KD = 8$, $AC = 13$.
Apskaičiuoti: S_{APCK}.

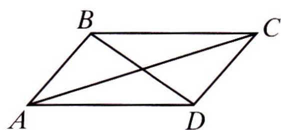
Lygiagretainio plotas lygus kraštinės ir aukštinės sandaugai. Pastebėkime, kad CD (AB) yra lygiagretainio $APCK$ aukštinė (ji statmena PC ir AK). CD ilgį rasime iš stačiojo $\triangle ACD$:

$$CD = \sqrt{AC^2 - AD^2} = \sqrt{13^2 - (4+8)^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} =$$
$$= \sqrt{(13-12)(13+12)} = \sqrt{1 \cdot 25} = 5.$$

Tada $S_{APCK} = AK \cdot CD = 4 \cdot 5 = 20$ (kv.v.).

Atsakymas. 20 kv.v.

3) PK ilgį apskaičiuosime remdamiesi lygiagretainio įstrižaines ir kraštines siejančia lygybe.



$ABCD$ — lygiagretainis,
$AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2$,
$AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + BC^2)$.

Lygiagretainyje $APCK$ žinome kraštinę ir įstrižainę:

$$AK = 4, \quad AC = 13.$$

Iš stačiojo $\triangle KCD$ apskaičiuokime CK ilgį:

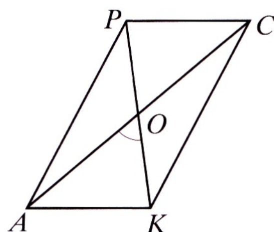
$$CK = \sqrt{KD^2 + CD^2} = \sqrt{8^2 + 5^2} = \sqrt{64 + 25} = \sqrt{89}.$$

Lygiagretainio įstrižainių ilgių kvadratų suma lygi kraštinių ilgių kvadratų sumai:

$$AC^2 + PK^2 = 2(AK^2 + KC^2), \quad 13^2 + PK^2 = 2(4^2 + 89),$$
$$PK = \sqrt{2 \cdot 105 - 169}, \quad PK = \sqrt{41} \text{ (ilg.v.)}.$$

Atsakymas. $\sqrt{41}$ (ilg.v.).

4) Raskime $\sin\angle AOK$.



Remkimės tuo, kad lygiagretainio plotas lygus įstrižainių ilgių ir sinuso kampo tarp jų sandaugos pusei:

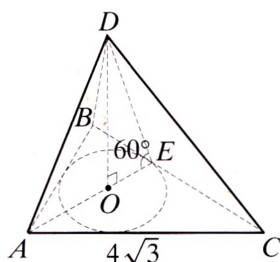
$$S_{APCK} = \frac{1}{2} \cdot PK \cdot AC \cdot \sin\angle O.$$

Kadangi $AC = 13$, $PK = \sqrt{41}$, $S = 20$, tai

$$20 = \frac{1}{2} \cdot 13 \cdot \sqrt{41} \cdot \sin\angle O, \qquad \sin\angle O = \frac{20 \cdot 2}{13 \cdot \sqrt{41}} = \frac{40}{13\sqrt{41}} = \frac{40 \cdot \sqrt{41}}{13 \cdot 41} = \frac{40\sqrt{41}}{533}.$$

Atsakymas. $\frac{40\sqrt{41}}{533}$.

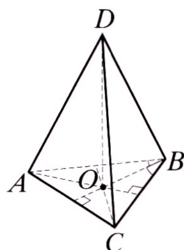
7a. Į taisyklingąją trikampę piramidę, kurios pagrindo kraštinės ilgis yra $4\sqrt{3}$, o šoninė siena su pagrindo plokštuma sudaro 60° kampą, įbrėžtas kūgis. Apskaičiuokite:
1) piramidės pagrindo plotą; 2) kūgio pagrindo plotą;
3) piramidės aukštinės ilgį; 4) piramidės ir kūgio tūrių santykį.



Duota: $AB = BC = AC = 4\sqrt{3}$,
$\angle DEO = 60^\circ$,
$AD = BD = CD$.

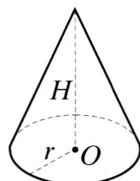
Rasti: 1) S_{ABC};
2) S_{skr};
3) DO;
4) $\frac{V_{\text{pir}}}{V_{\text{kūg}}}$.

Taisyklingoji trikampė piramidė yra tokia piramidė, kurios pagrindas — lygiakraštis trikampis, o šoninės sienos — lygiašoniai trikampiai.



$AB = BC = CA$, $AD = BD = CD$,
$DABC$ — taisyklingoji trikampė piramidė,
DO — aukštinė,
O — trikampio ABC pusiaukampinių (pusiaukraštinių, aukštinių) susikirtimo taškas (įbrėžtinio, apibrėžtinio apskritimų centras).
Piramidės tūris

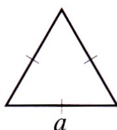
$$V = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot DO.$$



Kūgio tūris

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot H.$$

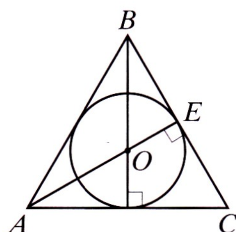
1) Piramdės pagrindas — lygiakraštis trikampis ABC, kurio $AB = AC = BC = 4\sqrt{3}$.



Lygiakraščio trikampio, kurio kraštinė lygi a:
- aukštinė (pusiaukampinė, pusiaukraštinė) lygi $\frac{\sqrt{3}}{2}a$;
- plotas lygus $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Apskaičiuojame pagrindo plotą: $S_{\triangle ABC} = \frac{(4\sqrt{3})^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{16 \cdot 3 \cdot \sqrt{3}}{4} = 12\sqrt{3}$ (kv.v.).

2)



$S_{\text{skr}} = \pi \cdot OE^2$.
Skritulio spindulio ilgį rasime remdamiesi tuo, kad

$$OE = \frac{1}{3}AE.$$

(Trikampio pusiaukraštinių susikirtimo taškas pusiaukraštines dalija santykiu 2 : 1, skaičiuojant nuo trikampio viršūnės.)

Apskaičiuojame AE:

$$AE = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 4\sqrt{3} = 6, \quad \text{ir} \quad OE = \frac{1}{3} \cdot 6 = 2 \text{ (ilg.v.)}.$$

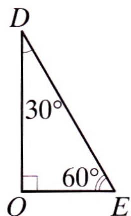
Pastaba. OE galėjome apskaičiuoti ir remdamiesi tuo, kad OE yra lygiakraščio trikampio įbrėžtinio apskritimo spindulys:

$$OE = \frac{AC \cdot \sqrt{3}}{6} = \frac{4\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{6} = 2.$$

Vadinasi,

$$S_{\text{skr}} = \pi \cdot 2^2 = 4\pi \text{ (kv.v.)}.$$

3) $DE \perp BC$, $AE \perp BC$ (E yra BC vidurys, nes $\triangle ABC$ — lygiakraštis, o $\triangle DBC$ — lygiašonis.) $\angle AED = 60^\circ$ — yra kampas tarp piramidės šoninės sienos ir pagrindo.
Piramidės aukštinės OD ilgį rasime iš stačiojo trikampio DOE.



$OE = 2$, $\angle E = 60^\circ$.
Vadinasi,

$$\angle D = 30^\circ.$$

OE yra prieš 30° kampą, vadinasi,

$$DE = 2 \cdot OE = 2 \cdot 2 = 4.$$

Tada $OD = \sqrt{DE^2 - OE^2} = \sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ (ilg.v.).

4) Apskaičiuojame piramidės ir kūgių tūrius:

$$V_{\text{pir}} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABC} \cdot DO = \frac{1}{3} \cdot 12\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} = 24 \text{ (kv.v.)},$$

$$V_{\text{kūg}} = \frac{1}{3} \cdot \left(\pi \cdot OE^2\right) \cdot DO = \frac{1}{3} \cdot 4\pi \cdot 2\sqrt{3} = \frac{8\sqrt{3}}{3} \cdot \pi \text{ (kv.v.)}.$$

Randame tūrių santykį:

$$V_{\text{pir}} : V_{\text{kūg}} = \frac{24}{\frac{8\sqrt{3}}{3} \cdot \pi} = \frac{24 \cdot 3}{8 \cdot \sqrt{3} \cdot \pi} = \frac{9}{\sqrt{3} \cdot \pi} = \frac{9\sqrt{3}}{3 \cdot \pi} = \frac{3\sqrt{3}}{\pi}.$$

Atsakymas. 1) $12\sqrt{3}$ (kv.v.); 2) 4π (kv.v.); 3) $2\sqrt{3}$ (ilg.v.); 4) $\frac{3\sqrt{3}}{\pi}$.

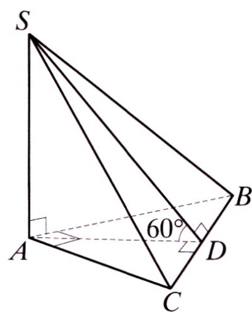
7b. Piramidės pagrindas — statusis trikampis, kurio statinių ilgiai yra 7 ir 24. Per šio trikampio statinius einančios piramidės sienos yra statmenos pagrindo plokštumai, o trečioji siena su ja sudaro 60° kampą. Apskaičiuokite piramidės aukštinės ilgį.

Nusibraižykime brėžinį.

- Kadangi dvi piramidės sienos yra statmenos pagrindui, tai tų sienų susikirtimo tiesė (piramidės briauna) yra statmena pagrindui. Vadinasi, ta briauna yra piramidės aukštinė (brėžinyje pažymėta SA).
- Kampą tarp trečiosios šoninės sienos ir pagrindo brėžinyje pažymime taip (jis lygus 60°):

1) Sienoje SBC brėžiame $SD \perp CB$ (SD pasviroji pagrindo plokštumai ABC).

2) Pagrindo atkarpa AD yra SD projekcija pagrinde: $AD \perp CB$, nes $CB \perp SD$ (trijų statmenų teorema).



Duota: $\triangle ABC$ — status ($\angle A = 90^\circ$), $AB = 7$, $AC = 24$, $\angle SDA = 60^\circ$.
Rasti: SA.

Sprendimas.
1) Nagrinėjame piramidės pagrindą ($\triangle ABC$). Randame įžambinę:

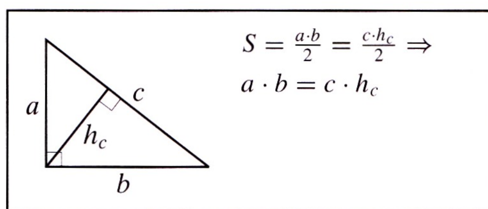
$$BC = \sqrt{24^2 + 7^2} = \sqrt{576 + 49} = \sqrt{625} = 25.$$

Randame AD:

$$AD \cdot BC = AB \cdot AC,$$

$$AD = \frac{AB \cdot AC}{BC},$$

$$AD = \frac{7 \cdot 24}{25} = \frac{168}{25}.$$

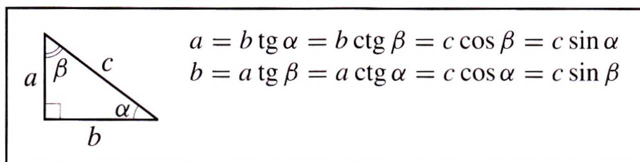


2) Aukštinės SA ilgį rasime iš stačiojo $\triangle SAD$.

Galima SA apskaičiuoti taip:

$SA = DA \cdot \operatorname{tg} 60^\circ = \frac{168}{25} \cdot \sqrt{3}$.

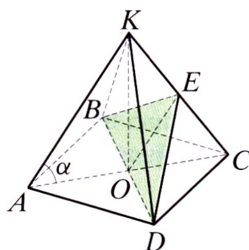
Arba taip:



$$SA = \sqrt{SD^2 - AD^2}, \ (AD \text{ prieš } 30^\circ \text{ kampą} \Rightarrow SD = 2AD),$$
$$SA = \sqrt{(2AD)^2 - AD^2} = \sqrt{4AD^2 - AD^2} = \sqrt{3AD^2} = \sqrt{3}AD,$$
$$SA = \sqrt{3} \cdot \frac{168}{25}.$$

Atsakymas. $\sqrt{3} \cdot \frac{168}{25}$.

7c. Taisyklingosios keturkampės piramidės pagrindo kraštinė lygi a, o šoninė briauna į pagrindo plokštumą pasvirusi kampu α. Per pagrindo įstrižainę lygiagrečiai šoninei briaunai nubrėžta plokštuma. Apskaičiuokite pjūvio plotą.

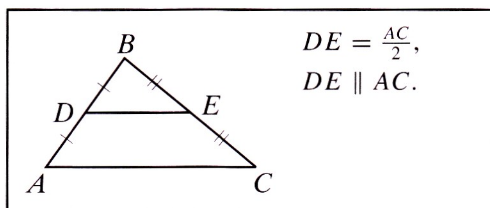


Duota: $ABCD$ — kvadratas ($AB = a$), KO — aukštinė, $\angle KAC = \alpha, . AK \parallel BED$.
Apskaičiuoti: S_{BED}.

1) Kadangi KA lygiagreti BED, tai $KA \parallel OE$ (nes plokštuma AKC eina per tiesę AK ir kerta su ta tiese lygiagrečią plokštumą BED tiese OE, kuri yra lygiagreti AK).

OE yra $\triangle AKC$ vidurinė linija, nes O yra pagrindo įstrižainių susikirtimo taškas ($AO = OC$), $OE \parallel AK$, vadinasi, $KE = EC$.

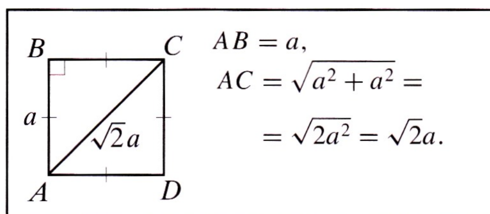
$$OE = \frac{AK}{2}.$$



2) Kvadrato $ABCD$ istrižainės AC ir BD yra lygios:

$$AC = BD = \sqrt{2}a;$$

$$AO = \frac{AC}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}a.$$



3) Iš stačiojo $\triangle AOK$:

$$AK = \frac{AO}{\cos \alpha} = \frac{\sqrt{2}a}{2 \cos \alpha}; \quad OE = \frac{\sqrt{2}a}{4 \cos \alpha}.$$

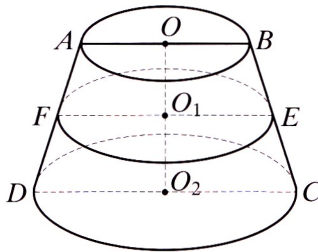
4) $\triangle BDE$ — lygiašonis (OE — aukštinė).

$$S_{\triangle BDE} = \frac{BD \cdot OE}{2} = \frac{\sqrt{2}a \cdot \sqrt{2}a}{2 \cdot 4\cos\alpha} = \frac{a^2}{4\cos\alpha}.$$

Atsakymas. $\frac{a^2}{4\cos\alpha}$ kv.vnt.

8a. Lygiašonė trapecija, kurios plotas lygus 420, o šoninės kraštinės ilgis yra 17, sukama apie aukštinę, nubrėžtą per pagrindų vidurio taškus. Gauto sukinio pjūvio, einančio per aukštinės vidurį ir lygiagretaus pagrindams, plotas lygus 196π. Apskaičiuokite:
1) pjūvio spindulio ilgį; 2) sukinio šoninio paviršiaus plotą; 3) sukinio tūrį.

Sukinys yra nupjautinis kūgis.



Duota: $AD = BC = 17$, $S_{ABCD} = 420$, $S_{O_1} = 196\pi$.
Rasti: 1) O_1E;
2) $S_{\text{šon}}$;
3) V.

r_1, H, l, r_2

Nupjautinio kūgio:
šoninio paviršiaus plotas

$$S_{\text{šon}} = \pi \cdot (r_1 + r_2) \cdot l;$$

tūris

$$V = \frac{1}{3}\pi\left(r_1^2 + r_2^2 + r_1 \cdot r_2\right) \cdot H.$$

Sprendimas.
1) Pjūvio plotas

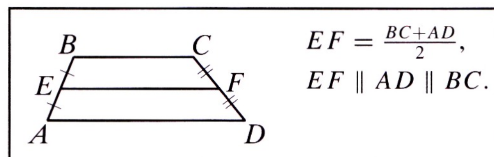
$$S_{O_1} = 196\pi = \pi \cdot O_1E^2,$$
$$O_1E^2 = 196, \quad O_1E = \sqrt{196}, \quad O_1E = 14.$$

2) Kūgio šoninio paviršiaus plotas:

$$S_{\text{šon}} = \pi \cdot (OB + O_2C) \cdot BC = 17\pi \cdot (OB + O_2C).$$

FE — trapecijos $ABCD$ vidurinė linija.

$$FE = 2 \cdot O_1E = 2 \cdot 14 = 28.$$



Trapecijos vidurinė linija lygi pagrindų sumos pusei, todėl

$$AB + DC = 2 \cdot FE, \quad OB + O_2C = \frac{AB + DC}{2},$$

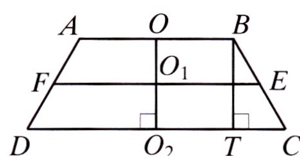
$$OB + O_2C = \frac{2FE}{2} = FE = 28.$$

Vadinasi, $S_{\text{šon}} = 17\pi \cdot 28 = 476\pi$.

3) Nupjautinio kūgio tūris:

$$V = \frac{1}{3}\pi\left(OB^2 + O_2C^2 + OB \cdot O_2C\right) \cdot OO_2.$$

Nagrinėkime lygiašonę trapeciją $ABCD$:



$O_1E = 14, \quad OB + O_2C = 28, \quad BC = 17,$
$S_{ABCD} = 420.$

Raskime trapecijos aukštinę (ji lygi kūgio aukštinei):

$$S_{ABCD} = \frac{AB + DC}{2} \cdot OO_2 = 28 \cdot OO_2 = 420, \qquad OO_2 = \frac{420}{28} = 15.$$

Raskime OB ir O_2C (kūgio pagrindų spindulius). Iš $\triangle BTC$ ($BC = 17$, $BT = 15$):

$$TC = \sqrt{17^2 - 15^2} = \sqrt{(17-15)(17+15)} = \sqrt{2 \cdot 32} = \sqrt{64} = 8.$$

Kadangi

$$OB = O_2T, \quad OB + O_2C = OB + O_2T + TC = 28,$$

tai

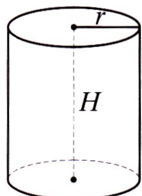
$$2OB = 28 - 8, \quad OB = 10 \quad \text{ir} \quad O_2C = 18.$$

Kūgio tūris: $V = \frac{1}{3}\pi\left(10^2 + 18^2 + 10 \cdot 18\right) \cdot 15 = 3020\pi$.

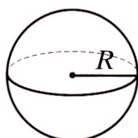
Atsakymas. 1) 14 (ilg.v.); 2) 476π (pl.v.); 3) 3020π (tūr.v.).

8b. Ritinio aukštinės ilgis yra 2 dm, o pagrindo skersmens ilgis yra 1 dm. Ar galima į šį ritinį įdėti rutulį, kurio tūris du kartus mažesnis už ritinio tūrį? Atsakymą pagrįskite.

Į ritinį įdėti rutulį galima tada, kai rutulio spindulys yra mažesnis už ritinio spindulį ir mažesnis už aukštinės pusę.



$V = \pi r^2 \cdot H$



$V_1 = \frac{4}{3}\pi R^3$

Duota: $H = 2$ dm, $r = 0{,}5$ dm, $V_1 = \frac{V}{2}$.

Apskaičiuokime ritinio tūrį:

$$V = \pi \cdot 0{,}5^2 \cdot 2 = 0{,}5\pi \ (\text{dm}^3).$$

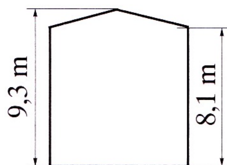
Apskaičiuokime rutulio spindulio ilgį:

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{0{,}5\pi}{2},$$
$$R^3 = \frac{0{,}5\pi \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot \pi},$$
$$R^3 = \frac{1{,}5}{8},$$
$$R = \frac{\sqrt[3]{1{,}5}}{2}\ \text{(dm)}.$$
$$\frac{\sqrt[3]{1{,}5}}{2} \approx \frac{1{,}14}{2} = 0{,}57\ \text{(dm)}.$$

Kadangi rutulio spindulys didesnis už ritinio spindulį ($0{,}57 > 0{,}5$), tai rutulio įdėti į ritinį negalima.

Atsakymas. Ne.

9a. a) Silosas supiltas į 6,8 m skersmens ritinio formos bokštą, kurio ašinis pjūvis pavaizduotas brėžinyje (bokšto viršus kūgio formos). 1 m³ siloso masė lygi 0,55 t. Ar tilps tokiame bokšte 170 t siloso?



1) Apskaičiuokime, kiek sveria ritinio formos dalyje telpantis silosas.
Ritinio dalies tūris:

$$V_r = \pi \cdot \left(\frac{6{,}8}{2}\right)^2 \cdot 8{,}1 = \pi \cdot 3{,}4^2 \cdot 8{,}1 = 93{,}636\pi\ (\text{m}^3).$$

$93{,}636\pi$ kubiniai metrai siloso sveria:

$$93{,}636\pi \cdot 0{,}55 = 51{,}4998\pi\ \text{(t)},$$

t. y. maždaug $51{,}4998 \cdot 3{,}14 \approx 161{,}7$ (t).
Vadinasi, 170 t siloso į tą bokšto dalį netilps.
2) Apskaičiuokime, kiek sveria kūgio formos dalyje telpantis silosas.
Kūgiškos dalies tūris:

$$V_\text{k} = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{6{,}8}{2}\right)^2 \cdot (9{,}3 - 8{,}1) = \frac{1}{3}\pi \cdot 3{,}4^2 \cdot 1{,}2 = 4{,}624\pi\ (\text{m}^3).$$

$4{,}624\pi$ kubiniai metrai siloso sveria:

$$4{,}624\pi \cdot 0{,}55 = 2{,}5432\pi\ \text{(t)},$$

t. y. maždaug $2{,}5432 \cdot 3{,}14 \approx 8$ (t).

3) Sudėję $161{,}7\,\text{t} + 8\,\text{t} = 169{,}7\,\text{t} < 170\,\text{t}$ matome, kad silosas greičiausiai netilps.
Bet skaičiavimai buvo apytiksliai. Pabandykime suskaičiuoti kiek galima tiksliau (π reikšmę įstatykime pačioje skaičiavimų pabaigoje). Bokšto tūris:

$$93{,}636\pi + 4{,}624\pi = 98{,}26\pi\ (\text{m}^3).$$

$98{,}26\pi$ kubiniai metrai siloso sveria:

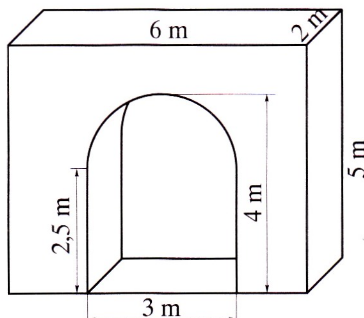
$$98{,}26\pi \cdot 0{,}55 = 54{,}043\pi \text{ (t)}.$$

Statome π:

$$54{,}043 \cdot \pi \approx 54{,}043 \cdot 3{,}141592654 = 169{,}78 \text{ (t)}.$$

Atsakymas. Netilps.

9b. b) Reikia išmūryti arką, kurios brėžinys ir matmenys pavaizduoti paveiksle. Ar užteks 16 000 plytų šiai arkai išmūryti, jeigu 1 m^3 mūro reikia 400 plytų?



Apskaičiuokime, kiek plytų reikėtų arkai ($6 \times 2 \times 5$) be skylės išmūryti.
Stačiakampio gretasienio tūris

$$V = 6 \cdot 2 \cdot 5 = 60 \,(\text{m}^3).$$

Tam gretasieniui išmūryti reikia $60 \cdot 400 = 24\,000$ (plytų).
Apatinė arkos dalis (stačiakampis gretasienis) užima

$$2{,}5 \cdot 3 \cdot 2 = 15 \,(\text{m}^3).$$

Tam reikia $15 \cdot 400 = 6000$ (plytų).
Viršutinė arkos dalis yra pusės skritulio formos, kurios tūrį rasime pusskritulio plotą padauginę iš 2 (m).
Viršutinės arkos dalies tūris lygus pusei ritinio, kurio pagrindo spindulys $3 : 2 = 1{,}5$ m, o aukštis 2 m, tūrio. Skaičiuojame:

$$\frac{\pi \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2}{2} \cdot 2 = \pi \cdot \frac{9}{4} \,(\text{m}^3).$$

Tokį tūrį užima

$$\frac{9}{4} \cdot \pi \cdot 400 = 900\pi \text{ plytų, t. y.}$$

$$900 \cdot \pi \approx 900 \cdot 3{,}14 = 2826 \text{ plytų}.$$

Vadinasi, iš viso prireiks

$$24\,000 - 6000 - 2826 < 16\,000 \text{ (plytų)}.$$

Atsakymas. Taip.

10a. Su kuriomis p reikšmėmis vektoriai $\vec{a}(2p;\ p;\ 1)$ ir $\vec{b}(2p;\ 7;\ -2)$ yra statmeni?

> Jei vektorių skaliarinė sandauga lygi 0, tai jie yra statmeni.
>
> $$\vec{a}(x_1;\ y_1;\ z_1)\cdot\vec{b}(x_2;\ y_2;\ z_2)=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2.$$

Randame vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ skaliarinę sandaugą:

$$2p\cdot 2p+p\cdot 7+1\cdot(-2)=4p^2+7p-2.$$

Vektoriai statmeni, kai jų skaliarinė sandauga lygi 0. Randame tas p, su kuriomis

$$4p^2+7p-2=0,\qquad D=49+32=81;$$

$$p_1=\frac{-7-9}{8}=-2,\qquad p_2=\frac{1}{4}.$$

Atsakymas. $-2;\ \frac{1}{4}$.

10b. Raskite kampo tarp vektorių $\vec{a}+\vec{b}$ ir $\vec{a}-\vec{b}$ kosinusą, kai $\vec{a}(0;\ -1;\ 2)$ ir $\vec{b}(2;\ 1;\ 2)$.

Randame vektoriaus $\vec{a}+\vec{b}$ koordinates:

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}(0+2;\ -1+1;\ 2+2),\qquad \vec{c}(2;\ 0;\ 4).$$

Randame vektoriaus $\vec{a}-\vec{b}$ koordinates:

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{d}(0-2;\ -1-1;\ 2-2),\qquad \vec{d}(-2;\ -2;\ 0).$$

Apskaičiuojame $\vec{c}$ ir $\vec{d}$ skaliarinę sandaugą:

$$\vec{c}\cdot\vec{d}=2\cdot(-2)+0\cdot(-2)+4\cdot 0=-4.$$

> Kampo tarp vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ kosinusas lygus tų vektorių skaliarinei sandaugai $\vec{a}\cdot\vec{b}$ padalytai iš tų vektorių ilgių sandaugos $|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$.
>
> $$\cos\alpha=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}.$$

Apskaičiuojame vektorių $\vec{c}$ ir $\vec{d}$ ilgius:

$$|\vec{c}|=\sqrt{2^2+0^2+4^2}=\sqrt{20},$$
$$|\vec{d}|=\sqrt{(-2)^2+(-2)^2+0^2}=\sqrt{8}.$$

> Vektoriaus $\vec{a}(x_1;\ y_1;\ z_1)$ ilgis:
>
> $$|\vec{a}|=\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}.$$

Randame kampo tarp vektorių $\vec{c}$ ir $\vec{d}$ kosinusą:

$$\cos\left(\widehat{\vec{c},\vec{d}}\right)=\frac{\vec{c}\cdot\vec{d}}{|\vec{c}|\cdot|\vec{d}|}=\frac{-4}{\sqrt{20}\cdot\sqrt{8}}=\frac{-4}{2\sqrt{5}\cdot 2\sqrt{2}}=-\frac{1}{\sqrt{10}}=-\frac{\sqrt{10}}{10}.$$

Atsakymas. $-\frac{\sqrt{10}}{10}$.

Bandomasis egzaminas

1. Jei $x < 0$, tai $\sqrt{x^2 + \frac{x^2}{4}} =$

A $\frac{\sqrt{5}}{2}$ **B** $\frac{x\sqrt{5}}{2}$ **C** $-\frac{x^2\sqrt{5}}{2}$ **D** $-\frac{x\sqrt{5}}{2}$ **E** $\frac{|x|}{2}$

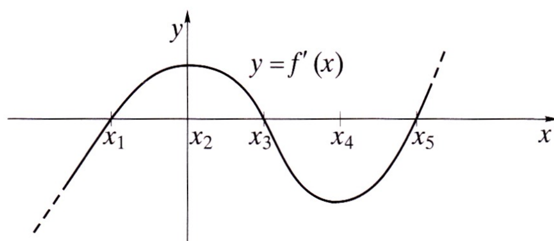
2. Jei skaičius y už skaičių z mažesnis 70%, o $x : y = 2 : 5$, tai $x : y : z =$

A 2 : 5 : 17 **B** 6 : 15 : 50 **C** 4 : 10 : 17 **D** 2 : 5 : 7 **E** 1 : 3 : 10

3. Funkcijos $f(x) = 4 - 3\cos x$ reikšmių sritis yra:

A $[-3; 4]$ **B** $[-4; 3]$ **C** $[3; 4]$ **D** $[1; 7]$ **E** $[4; 9]$

4. Iš brėžinio nustatykite funkcijos $f(x)$ ekstremumo taškų skaičių.



A 2 **B** 3 **C** 1 **D** 4 **E** Nei vienas iš atsakymų **A**, **B**, **C**, **D** neteisingas

5. Išspręskite nelygybę $\frac{1}{x^2} > 4$.

A $(-\infty; -0,5)$ **B** $(-0,5; 0)$; $(0; 0,5)$ **C** $(0,5; +\infty)$ **D** $(-\infty; -0,5)$, $(0; 0,5)$
E $(-\infty; -0,5)$, $(0,5; +\infty)$

6. Iš skaitmenų 1, 2, 3, 4 ir 5 sudaromi penkiaženkliai skaičiai, nesidalijantys iš 5 ir neturintys vienodų skaitmenų. Kiek yra tokių skaičių?

A 120 **B** 24 **C** 96 **D** 6 **E** 92

7. Išspręskite nelygybę:

$\left(\frac{25}{9}\right)^{2x} \cdot \left(\frac{27}{125}\right)^{x+3} \geqslant \frac{\lg 8}{\lg 32}$.

8. Raskite lygties

$$1 + \cos(6x) = \cos(3x) + 1$$

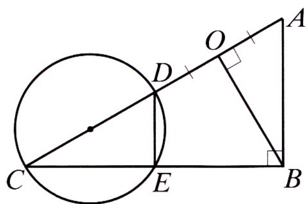
didžiausią neigiamą sprendinį laipsniais.

9. Funkcija $g(x) = 2x - 2$.

1) Raskite visas funkcijos $g(x)$ pirmykštes funkcijas.
2) Iš visų pirmykščių funkcijų išrinkite pirmykštę funkciją $G(x)$, kurios grafiko liestinė būtų tiesė $y = 4x - 7$.
3) Apskaičiuokite plotą figūros, apribotos funkcijos $g(x)$, jos pirmykštės funkcijos $G(x)$ grafikais ir Oy ašimi.

10. Reikia pagaminti ritinio formos uždarą cisterną, kurioje tilptų 32π m^3 skysčio. Pagaminti kvadratinį metrą cisternos sienos yra perpus pigiau, nei pagaminti kvadratinį metrą viršaus arba pagrindo. Kokio ilgio turėtų būti cisternos pagrindo spindulys ir cisternos aukštis, kad jos pagaminimui išleistume mažiausiai pinigų?

11. Stačiojo $\triangle ABC$ įžambinė $AC = 12\,\text{cm}$ ir $\angle C = 30^\circ$. Iš trikampio viršūnės B nubrėžta aukštinė BO. Nuo taško O įžambinėje atidėta atkarpa $OD = OA$ ir nubrėžtas apskritimas, kurio skersmuo yra DC. Jis statinį BC kerta taške E.



1) Ar $DE \parallel AB$?
2) Apskaičiuokite DE.
3) Per tašką A nubrėžta tiesė, lygiagreti BD, kerta tiesę DE taške G. Įrodykite, kad keturkampis $ABDG$ yra rombas.
4) Apskaičiuokite rombo $ABDG$ plotą.

12. 28 lemputės išdėstytos keturiomis eilėmis po 7 lemputes kiekvienoje eilėje. Perdegė dvi lemputės. Kokia tikimybė, kad perdegusios lemputės yra vienoje eilėje?

13. Jei $3^{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\cdots} = 9^x$, tai $x =$

14. Įrodykite, kad lygtis $\lg\left(10 - 3x^2\right) = \sqrt{x-1} + \sqrt{x+1}$ neturi sprendinių.

15. Apskaičiuokite:
$8\left(\sin^2 126^\circ + \sin^2 144^\circ\right) - \sqrt{2}\cos 315^\circ$.

16. Jūros vandenyje druska sudaro 5% jo masės. Kiek kilogramų gėlo vandens reikia įpilti į 30 kg jūros vandens, kad druskos koncentracija būtų 1,5%?

17. Stogo forma yra taisyklingoji piramidė, kurios pagrindas — kvadratas. Kvadrato matmenys yra $4{,}5\,\text{m} \times 4{,}5\,\text{m}$. Kampas tarp piramidės sienos ir pagrindo lygus 45°. Ar užteks stogui uždengti 33 stačiakampio formos skardos lakštų, kurių kiekvieno matmenys yra $70\,\text{cm} \times 140\,\text{cm}$, jei 10% visos skardos lieka atraižoms?

Bandomasis egzaminas

1. Apskaičiuokite $\log_3 \log_3 \log_3 27$.

A 1 B 3 C 9 D 3^3 E 0

2. Raskite funkcijos $f(x) = -x^2 - 4x + 8$ reikšmių didėjimo intervalą.

A $(-2; 2)$ B $(2; +\infty)$ C $(-\infty; -2]$ D $(-\infty; -2)$
E Visoje apibrėžimo srityje funkcija yra mažėjanti

3. Keliais procentais padidės kubo tūris, jei jo briauną pailginsime 50% esamo jos ilgio?

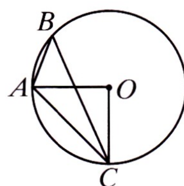
A 50% B 237,5% C 100% D 23,75% E 2,375%

4. Apskaičiuokite integralo $\int_1^{16} \frac{dx}{\sqrt[4]{x}}$ reikšmę.

A $\frac{28}{3}$ B $-\frac{28}{3}$ C 2 D 3 E $\frac{20}{3}$

5. Brėžinyje $\angle ABC = 45^\circ$, $AC = 18$ cm.
Apskaičiuokite apskritimo spindulio ilgį.

A $2\sqrt{9}$ B 162 C $9\sqrt{2}$ D 18 E 9



6. Suprastinkite reiškinį $\frac{x-1-|x-1|}{3|1-x|}$, kai $x < 1$.

A $\frac{2x}{3(1-x)}$ B $\frac{2(1-x)}{3(x-1)}$ C 0 D $\frac{2}{3}$ E $-\frac{2}{3}$

7. Įrodykite, kad skaičius $5^{32} - 2^{32}$ dalijasi iš 609.

8. Raskite lygties

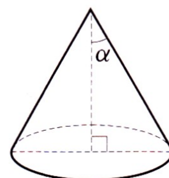
$$2\cos(2x) = \sqrt{3}\cos(2005\pi)$$

mažiausią sprendinį, priklausantį intervalui $(-90^\circ; 0^\circ)$.

9. Išspręskite nelygybę:

$\left(\frac{2}{9}\right)^{x^2+x} - (20{,}25)^{2x-7} \geqslant 0.$

10. Kūgio tūris lygus 40π dm^3, o kampo α tarp jo sudaromosios ir aukštinės kosinusas lygus $\frac{5}{7}$.
1) Parodykite, kad $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\sqrt{6}}{5}$.
2) Apskaičiuokite kūgio sudaromosios ilgį.
3) Apskaičiuokite kūgio viso paviršiaus plotą.
Atsakymą pateikite kvadratinių decimetrų tikslumu.



11. Studento stipendija, padidinus ją du kartus tuo pačiu procentų skaičiumi, iš viso padidėjo 2,25 karto. Po kiek procentų buvo didinama stipendija?

12. Lygties $x^2+3x+q = 0$ sprendiniai x_1 ir x_2 tenkina sąlygą $3x_1-x_2 = 4$. Apskaičiuokite q.

13. Metamos trys monetos: 1 ct, 2 ct, 5 ct. Atsitiktinis dydis X — atsivertusių centų suma. Raskite atsitiktinio dydžio X skirstinį ir apskaičiuokite jo matematinę viltį.

14. Išspręskite nelygybę:
$\log_{2x-3}(3x^2 - 7x + 3) < 2.$

15. Laisvai krintantis kūnas pirmąją sekundę nukrenta 4,9 m, o kiekvieną tolesnę sekundę 9,8 m daugiau, negu prieš tai buvusią. Iš dangoraižio buvo paleistas vienas kūnas laisvai kristi, o po 5 s iš tos pačios vietos buvo paleistas kitas kūnas. Ar praėjus 7 s atstumas tarp jų bus 220,5 m? Atsakymą pagrįskite.

16. Laikrodis rodo 5 valandas. Apskaičiuokite, po kiek minučių minutinė rodyklė pirmą kartą pasivys valandinę rodyklę.

17. Sode yra daugiau kaip 14 obelaičių ir kriaušaičių. Jei obelaičių skaičių padvigubintume, o kriaušaičių skaičių padidintume 18, tai kriaušaičių būtų daugiau. Jei kriaušaičių skaičių padvigubintume, o obelaičių skaičiaus nekeistume, tai obelaičių vis tiek būtų daugiau. Kiek sode yra obelaičių ir kiek yra kriaušaičių?

18. Ritinys iš viršaus uždengtas to paties spindulio pusrutuliu. Gautojo kūno tūris yra V. Apskaičiuokite ritinio spindulio ilgį, su kuriuo gautojo kūno viso paviršiaus plotas būtų mažiausias.

Bandomasis egzaminas

1. Kurie iš išvardytų dydžių yra atvirkščiai proporcingi? (1t)
a) Stačiakampio ilgis ir plotis, kai plotas nesikeičia.
b) Judėjimo greitis ir kelias, kai laikas pastovus.
c) Laikas ir kelias, kai greitis pastovus.

A b **B** a **C** a, b **D** b, c **E** c

2. Periodinę dešimtainę trupmeną $0,(6)$ išreikškite paprastąja. (1t)

A $\frac{6}{10}$ **B** $\frac{10}{6}$ **C** $\frac{1}{6}$ **D** $\frac{2}{3}$ **E** $\frac{3}{5}$

3. Apskaičiuokite $\cos(\pi - \alpha)$, kai $\cos\alpha = -0,75$. (1t)

A $-0,25$ **B** $-0,75$ **C** $0,75$ **D** $0,25$ **E** $0,8$

4. Apskaičiuokite $\vec{a} - 2\vec{b}$, kai $\vec{a}(-2; 3; 0)$, $\vec{b}(1; -1; 5)$. (1t)

A $(-4; 5; -10)$ **B** $(-4; 1; -10)$ **C** $(-4; 4; -5)$ **D** $(0; 1; 10)$ **E** $(4; 5; 10)$

5. Iškilojo 12-kampio kampų suma lygi: (1t)

A 900° **B** 1800° **C** 1700° **D** 2160° **E** 1980°

6. Funkcijos $y = 5x^2 - 2x + 5$ grafikas abscisių ašį kerta: (1t)

A keturis kartus **B** tris kartus **C** du kartus **D** vieną kartą **E** nė karto

7. Išspręskite lygtį:
$\log_3\left(3^x - 8\right) = 2 - x$. (3t)

8. Aritmetinės progresijos pirmųjų n narių suma išreiškiama formule $S_n = 4n^2 - 3n$. Apskaičiuokite:
1) pirmuosius 3 progresijos narius; (2t)
2) progresijos skirtumą; (1t)
3) kelintas progresijos narys lygus 177. (2t)

9. Trupmena $\frac{5x-7}{x+3a}$ lygi 1, kai $x = 10$. Su kuria x reikšme trupmenos reikšmė lygi 3? (3t)

10. Apskaičiuokite integralo $\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \cos\frac{x}{3}\,dx$ reikšmę. (2t)

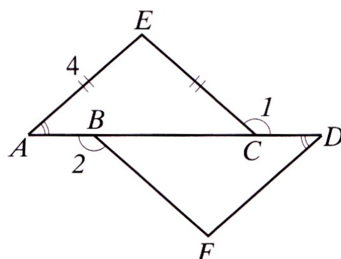
11. Taisyklingosios keturkampės piramidės šoninio paviršiaus plotas lygus $14,76\,m^2$, o viso paviršiaus plotas lygus $18\,m^2$. Apskaičiuokite piramidės pagrindo kraštinės ir aukštinės ilgius. (4t)

12. Kuriais laiko momentais taško pagreitis lygus nuliui, jei taškas juda pagal dėsnį:
$s(t) = 0,5t^4 - 5t^3 + 12t^2 - 1$ ($s(t)$ — kelias, t — laikas)? (2t)

13. Prekės kaina padidėjo 25%. Keliais procentais reikia sumažinti naująją prekės kainą, kad ji būtų 10% didesnė už pradinę jos kainą? (3t)

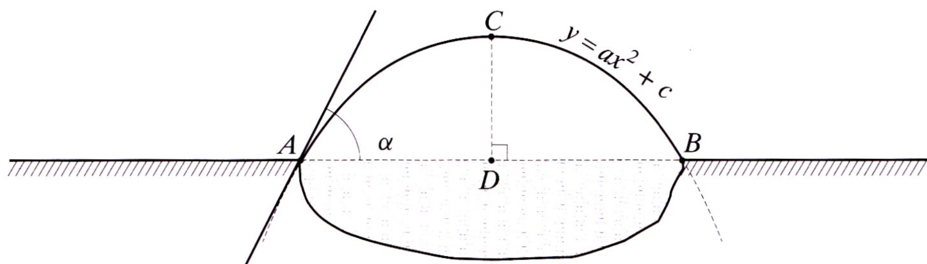
14. Kiek sprendinių turi lygtis $\cos x = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$, kai $x \in \left[\frac{5\pi}{2}; \frac{9\pi}{2}\right]$? (3t)

15. *Duota*: $AC = BD = 6\,\text{cm}$, $AE = EC = 4\,\text{cm}$,
$\angle 1 = \angle 2$, $\angle A = \angle D$.
Įrodykite: $\triangle ACE = \triangle BDF$. (2t)
Raskite: $\angle F$ didumą 1° tikslumu. (2t)



16. Dėžėje yra vienas juodas ir keli balti rutuliai. Nežiūrint ištraukti 2 rutuliai. Įvykio „ištraukti du balti rutuliai" tikimybė lygi $\frac{2}{3}$. Kiek dėžėje yra baltų rutulių? (3t)

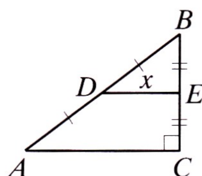
17. Tiltas yra parabolės $y = ax^2 + c$ formos. Atstumas tarp tilto pagrindų (AB) lygus 120 m, o atstumas CD nuo tilto vidurio taško iki tilto pagrindus jungiančios tiesė lygus 10 m.
1) Raskite koeficientų a, c reikšmes. (3t)
2) Kampas α lygus kampui, kurį sudaro parabolės $y = ax^2 + c$ liestinė, nubrėžta per tašką A, su tiese AB. Apskaičiuokite kampo α dydį. (3t)



18. Išspręskite nelygybę:
$\sqrt{x^2 + 4x + 4} \leqslant 1$. (3t)

Bandomasis egzaminas

1. $x = ?$



$BC = 6$,
$AD = 5$. (1t)

A 8 **B** 5 **C** 3 **D** 4 **E** $\sqrt{35}$

2. $\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}(45^\circ - \alpha)}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}(45^\circ - \alpha)} = ?$ (1t)

A 0 **B** $\frac{\sqrt{3}}{3}$ **C** 1 **D** $\sqrt{3}$ **E** $\operatorname{tg}\alpha$

3. Aritmetinės progresijos, kurios $a_1 = 4$ ir $a_2 = -4$, n-tojo nario formulė yra: (1t)

A $4 - 8n$ **B** $8n - 3$ **C** $5n - 5$ **D** $12 - 8n$ **E** $9 - n$

4. Funkcijos $y = \frac{x+1}{\sqrt{1-x^2}}$ apibrėžimo sritis yra: (1t)

A $(-\infty; -1)$ **B** $(-1; 1)$ **C** $(1; +\infty)$ **D** $[-1; 1]$ **E** $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$

5. Kuriame intervale apibrėžta funkcija $y = \arcsin x$? (1t)

A $(-\infty; +\infty)$ **B** $[0; 1]$ **C** $[-1; 1]$ **D** $(0; 1)$ **E** $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

6. $\frac{(4m-1)!}{(4m-3)!} = ?$ (1t)

A $16m^2 - 8m + 2$ **B** $4m - 1$ **C** $16m^2 - 4m + 2$ **D** $16m^2 - 12m + 2$ **E** $4m - 3$

7. Jei $\log_x \sqrt[5]{16} = -1{,}6$, tai $x =$ (1t)

A 2 **B** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **C** $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ir $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **D** $\sqrt{2}$ **E** $\frac{1}{2}$

8. Duota lygtis $(x^{12} - 4x^8)\log_2(x^2 - 2) = 0$.
1) Raskite lygties apibrėžimo sritį. (2t)
2) Išspręskite lygtį. (3t)

9. Ar ekvivalenčios nelygybės $\frac{2}{x} \geqslant 1$ ir $x(2 - x) \geqslant 0$? (2t)

10. Keleivinis traukinys pravažiuoja pro stulpą per 6 s. Per kokį laiką prasilenks vienas pro kitą važiuodami priešinga kryptimi greitasis ir keleivinis traukiniai, jei greitojo traukinio greitis 1,5 karto didesnis už keleivinio, o keleivinio ilgis $1\frac{1}{3}$ karto didesnis už greitojo? (4t)

11. Su kuria parametro a reikšme lygtis $x^2 - 2ax + a^2 = 0$ turi sprendinį $x = 3$?

12. Apskaičiuokite funkcijos

$$y = 6 \cdot 5^{x+1} - 5^{x+2} + 6 \cdot 5^x - 22$$

grafiko ir abscisių (Ox) ašies susikirtimo taško koordinates. (3t)

13. Parduotuvės vitrinoje yra devyni stalo teniso kamuoliukai — 3 raudoni, 3 mėlyni ir 3 geltoni. Pardavėja atsitiktinai paima 2 kamuoliukus.
1) Parodykite, jog įvykio A (abu kamuoliukai yra raudoni) tikimybė lygi $\frac{1}{12}$. (2t)
2) Kokia tikimybė, kad bent vienas paimtas kamuoliukas yra raudonas? (2t)
3) Kokia tikimybė, kad vienas paimtas kamuoliukas yra raudonas, o kitas — mėlynas? (1t)

14. A, B ir C yra apskritimo, kurio centras O, taškai. Apskaičiuokite $\angle ACB$ dydį, jei $\angle OBC = 80^\circ$ ir $AO \parallel BC$. (3t)

15. Išspręskite lygtį:
$6 + \sqrt{x+6} = x$. (2t)

16. Su kuria a reikšme figūros, apribotos kreivėmis $y = \sin(2x)$, $y = 0$, $x = \frac{\pi}{6}$, $x = a$, plotas lygus $0{,}5$? (4t)

17. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — taisyklingoji keturkampė prizmė. Įrodykite, kad plokštumos AD_1C ir BB_1D_1D yra statmenos. (3t)

18. Iš miestelio išėjo pasivaikščioti poilsiautojas. Kai poilsiautojas nutolo nuo miestelio 6 km, paskui jį tuo pačiu keliu išvažiavo dviratininkas, kurio greitis 9 km/h didesnis už poilsiautojo greitį. Kai dviratininkas pavijo poilsiautoją, abu pasuko tuo pačiu keliu atgal ir grįžo kartu 4 km/h greičiu. Kokiu greičiu pirmyn turėjo eiti poilsiautojas, kad kelyje užtruktų mažiausiai laiko? (5t)

19. Per funkcijos $y = x^2 + x + 10$ grafiko tašką A, kurio abscisė $x = 1$, nubrėžta liestinė. Ta liestinė abscisių ašį kerta taške B. Apskaičiuokite vektorių $\overrightarrow{OA}$ ir $\overrightarrow{OB}$ skaliarinę sandaugą (O — koordinačių pradžios taškas). (4t)

20. Apskaičiuokite stačiojo trikampio kampų dydžius, jei jų sinusai sudaro geometrinę progresiją.

(4t)

K11. STATISTIKOS ELEMENTAI

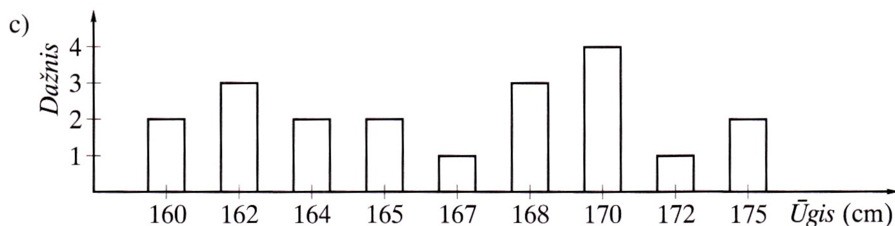
1 variantas

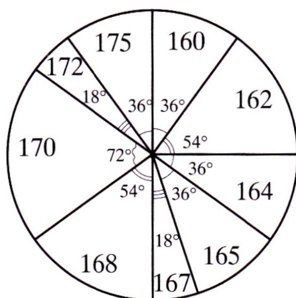
1. a) 160, 160, 162, 162, 162, 164, 164, 165, 165, 167, 168, 168, 168, 170, 170, 170, 170, 172, 175, 175;

b)

$x_i =$	160	162	164	165	167	168	170	172	175
$f_i =$	2	3	2	2	1	3	4	1	2
$\frac{f_i}{n} =$	$\frac{2}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{4}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{2}{20}$

c)

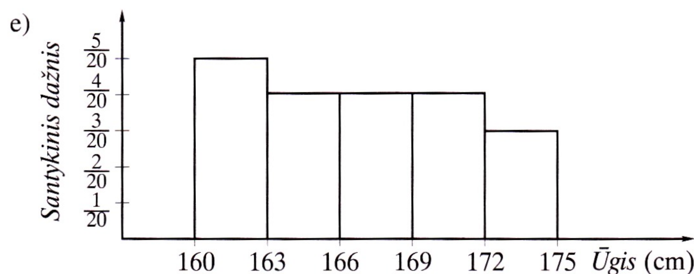




d)

Intervalas	[160; 163)	[163; 166)	[166; 169)	[169; 172)	[172; 175]
$f_i =$	5	4	4	4	3
$\frac{f_i}{n} =$	$\frac{5}{20}$	$\frac{4}{20}$	$\frac{4}{20}$	$\frac{4}{20}$	$\frac{3}{20}$

e)



2. a) $M_o = 6$ ir $M_o = 10$, $Q_1 = 6$, $Q_2 = M_d = 7{,}5$, $Q_3 = 9{,}5$;
b) 11A: $M_o = 7$, $M_d = Q_2 = 7$, $Q_1 = 6$, $Q_3 = 8$;
11B: $M_o = 6$, $M_d = Q_2 = 6$, $Q_1 = 5$, $Q_3 = 6$;
c) $M_o = 10$, $Q_1 = 3$, $Q_2 = M_d = 6{,}5$, $Q_3 = 9{,}5$.

3. $\bar{x}_A = 6{,}7$, $\bar{x}_B = 5{,}4$, $\bar{x}_R = 6{,}3$; $s_A^2 = 5{,}1(2)$, $s_B^2 = 5{,}3(7)$, $s_R^2 = 4{,}4(5)$.

4. 1) $D_f = (0; +\infty)$, $D_g = (-\infty; +\infty)$; 2) $f'(x) = \frac{1}{x}$, $g'(x) = 2$; 3) $\frac{1}{2}$.

5. $v \in (10; 40]$.

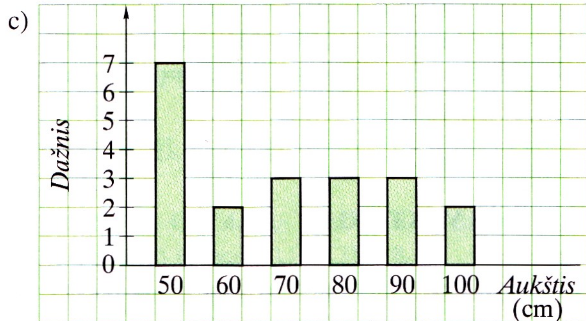
2 variantas

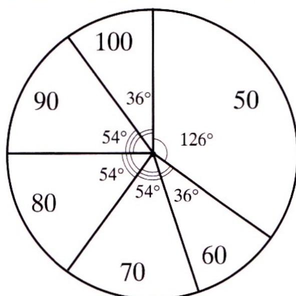
1. a) 50, 50, 50, 50, 50, 50, 50, 60, 60, 70, 70, 70, 80, 80, 80, 90, 90, 90, 100, 100;

b)

$x_i =$	50	60	70	80	90	100
$f_i =$	7	2	3	3	3	2
$\frac{f_i}{n} =$	$\frac{7}{20}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{2}{20}$

c)

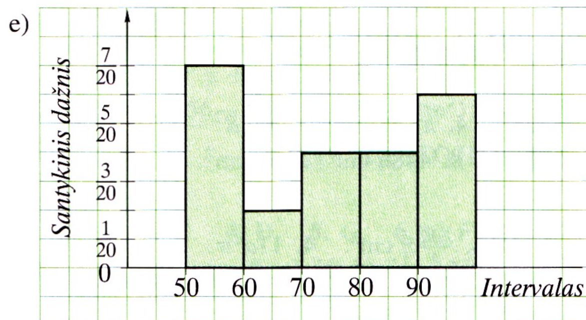




d)

Intervalas	[50; 60)	[60; 70)	[70; 80)	[80; 90)	[90; 100]
$f_i =$	7	2	3	3	5
$\frac{f_i}{n} =$	$\frac{7}{20}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{5}{20}$

e)



2. a) $M_o = 12$ ir $M_o = 15$, $M_d = 12{,}5$, $Q_1 = 11{,}5$, $Q_2 = 12{,}5$, $Q_3 = 14{,}5$;
b) 11A: $M_o = 8$, $Q_1 = 7$, $Q_2 = M_d = 8$, $Q_3 = 8$;
11B: $M_o = 7$, $M_d = 7$, $Q_1 = 6{,}5$, $Q_2 = 7$, $Q_3 = 8{,}5$;
c) $M_o = 4$, $M_o = 9$, $Q_1 = 3$, $Q_2 = M_d = 4{,}5$, $Q_3 = 8$.

3. $\bar{x}_D = 5{,}7$, $s_D^2 = 4{,}9$; $\bar{x}_A = 6{,}7$, $s_A^2 = 4{,}4(5)$; $\bar{x}_M = 6{,}4$, $s_M^2 = 3{,}8(2)$.

4. 1) $D_f = (2; +\infty)$, $D_g = (-\infty; +\infty)$; 2) $f'(x) = \frac{3}{x-2}$, $g'(x) = 3$; 3) 3.

5. Nesuspės.

K12. TIESĖS IR PLOKŠTUMOS

1 variantas

2. $\triangle SBD$ — statusis. **3.** 9 cm. **4.** $\sqrt{15{,}17}$ m. **5.** 0,5 m.
6. $S_{ABCD} = 400\,\text{dm}^2$, $S_{ABS} = S_{ADS} = 210\,\text{dm}^2$, $S_{DCS} = S_{BCS} = 290\,\text{dm}^2$. **7.** 7 dm.

2 variantas

1. a) PK yra $\triangle ABC$ vidurinė linija, todėl $PK \parallel BC$. Jei tiesė, nesanti plokštumoje, lygiagreti kuriai nors plokštumos tiesei, tai ji lygiagreti ir plokštumai. Vadinasi, $PK \parallel SBC$.
2. $\angle SBA = \angle SBC = 90°$. Kadangi SB statmena dviem susikertančiom tiesėms AB ir BC, tai SB statmena plokštumai ABC, todėl $SB \perp BD$. Vadinasi, $\angle SBD = 90°$, o $\triangle SBD$ — statusis.
3. 15 cm. **4.** 9 m. **5.** 3,36 cm.
6. $S_{ABC} = 120\,\text{cm}^2$, $S_{SAC} = 216\,\text{cm}^2$, $S_{SCB} = 150\,\text{cm}^2$, $S_{SAB} = 234\,\text{cm}^2$. **7.** 6 dm.

K13. ERDVĖS VEKTORIAI

1 variantas

1. $\overrightarrow{DK} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$. **2.** a) $\overrightarrow{PO}$; b) $\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{AD}$. **3.** $\vec{p}(4; -18; -9)$, $|\vec{p}| = \sqrt{421}$.
4. a) Kolinearūs; b) $n = -4$, $m = -2$; $n = 4$, $m = 2$. **5.** Komplanarūs.
6. a) 3; b) ne; c) 9. **8.** $\frac{4}{9}$. **9.** $\sqrt{2{,}5}$.

2 variantas

1. $\overrightarrow{DL} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$. **2.** a) $\overrightarrow{AK}$; b) $\overrightarrow{AK}$. **3.** $\vec{p}(5; 15; -5)$, $|\vec{p}| = 5\sqrt{11}$.
4. a) Kolinearūs; b) $m = -2\sqrt[4]{8}$, $n = -8\sqrt[4]{2}$; $m = 2\sqrt[4]{8}$, $n = 8\sqrt[4]{2}$. **5.** Nėra komplanarūs.
6. a) $-4\sqrt{2}$; b) vektoriai nėra statmeni; c) 3,5. **8.** $\frac{2}{\sqrt{114}}$. **9.** $\sqrt{5\frac{1}{4}}$.

K14. BRIAUNAINIAI

1 variantas

1. 29. **2.** $4\sqrt{15}\,\text{cm}^2$. **3.** $\sqrt{37}$ cm. **4.** 9 cm, $\sqrt{65}$ cm, $289\frac{1}{3}\,\text{cm}^3$.
5. $22{,}5\,\text{dm}^3$. **6.** $6048\,\text{m}^3$. **7.** $\frac{\sqrt{3}}{3}Q\sqrt{Q}$.

2 variantas

1. 17. **2.** $18\sqrt{3}\,\text{cm}^2$. **3.** $208\,\text{cm}^2$. **4.** $\sqrt{194}$ dm, 13 dm, $688\,\text{dm}^3$.
5. $10\,\text{cm}^3$. **6.** $2\frac{2}{7}\,\text{m} \approx 2{,}86$ m. **7.** $\frac{1}{8}a^3$.

K15. SUKINIAI

1 variantas

1. $40\sqrt{3}\,\text{cm}^2$. **2.** 6 cm. **3.** $\frac{\sqrt{\pi}}{\pi}$ cm, $11\,\text{cm}^2$. **4.** $\pi\big(R^2 + r^2 + \sqrt{2}(R^2 - r^2)\big)$.
5. $12\frac{2}{3}\pi$, $144\frac{2}{3}\pi$. **6.** $54\,\text{cm}^3$. **7.** $\approx 0{,}35$ m. **8.** $448\pi\,\text{cm}^3$, $216\pi\,\text{cm}^2$.

2 variantas

1. $36\,\text{cm}^2$. **2.** $r = 4$ cm, $h = 14$ cm. **3.** 1 cm, $\frac{2\sqrt{2}}{3}\pi\,\text{cm}^2$. **4.** $11a^2\pi$.
5. $34\,182\pi\,\text{cm}^3$ arba $166\,651\frac{1}{3}\pi\,\text{cm}^3$. **6.** $12{,}5\pi\,\text{cm}^3$, $87{,}5\pi\,\text{cm}^3$. **7.** Maždaug iki 18 cm.
8. $800\pi\,\text{cm}^3$, $1080\pi\,\text{cm}^2$.

K16. KARTOJIMO MEDŽIAGA

1 variantas

1. E. **2.** E. **3.** A. **4.** B. **5.** B. **6.** a) 60; b) −5. **7.** $\frac{3}{x+3}$.
8. a) $(-2; -1)$, $(2; 2)$; b) 1; 6; c) $\frac{1}{2}$. **9.** a) 4; b) $\frac{1}{3}$.
10. a) $b = -\frac{35}{2}$, $a \neq \frac{18}{7}$; b) kai $m = 3$, tai $x = 0$; kai $m = 4$, tai $x = -2$ ir $x = 0$.
11. a) 2 km/h; b) 4%.

2 variantas

1. C. **2.** C. **3.** A. **4.** E. **5.** B. **6.** a) 8; b) −7. **7.** $\frac{5}{x-4}$.
8. a) (0; −1), (4; 2); b) 2, 4; c) $\frac{1}{6}$. **9.** a) −1; b) 15.
10. a) $-107\frac{1}{3}$; b) $a=-3$, $x=0$ ir $x=54$. **11.** a) 20 km/h; b) 12%.

K17. KARTOJIMO MEDŽIAGA

1 variantas

1. B. **2.** C. **3.** C. **4.** D. **5.** D. **6.** a) 13; b) 4; c) $\frac{1}{8}$, 2.
7. a) $(-\infty; 3)$; b) $(1; 2] \cup [6; +\infty)$. **8.** 7. **9.** a) 8 sprendiniai; b) $-\frac{3\pi}{4}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{4}$.
10. a) $\frac{7\pi}{8}$; b) 44. **11.** a) $x \in \left(-3; -\frac{2}{3}\right]$; b) $x \in [2; 3) \cup (3; 4]$.
12. a) $y \in [-2; 4]$; b) $y \in (1; +\infty)$; c) $y \in [0; 2\pi]$.

2 variantas

1. D. **2.** E. **3.** C. **4.** A. **5.** C. **6.** a) 6; b) 27; c) 3; 27.
7. a) $(4; +\infty)$; b) $(-\infty; 1) \cup [2; 3]$. **8.** 5. **9.** a) 9 sprendiniai; b) $-\frac{\pi}{6}$. **10.** a) $\frac{17\pi}{24}$; b) 19.
11. a) $x \in (1; +\infty)$; b) $x \in [1; 3]$. **12.** a) $y \in [-1; 3]$; b) $y \in (1; +\infty)$; c) $y \in \left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

K18. KARTOJIMO MEDŽIAGA

1 variantas

1. C. **2.** D. **3.** C. **4.** B. **5.** a) 3; b) septynių; c) 24. **6.** a) 1980; b) 22; c) $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$.
7. a) Funkcijos reikšmės didėja, kai $x \in (-4; -1)$ ir $(0; +\infty)$; mažėja, kai $x \in (-\infty; -4)$ ir $(-1; 0)$; b) 1) $p=-2$, $q=5$; 2) $x=-1$; 3) $y=6$;
c) 1) $x \in \left(-\infty; \frac{2}{3}\right)$; 2) $a=-\frac{5\sqrt{3}}{3}$; 3) $y=-\frac{5\sqrt{3}}{3}\ln 5$.
8. 1) $f'(x)=-5+5\sin(2x)$, $g'(x)=-\frac{1}{\cos^2(5x+10)}$; 2) $g'(-2)=-1$;
3) $x=(-1)^k \cdot \frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{2}\cdot k$, $k \in \mathbf{Z}$. **9.** a) Negali; b) į tašką, kuris nuo A nutolęs 4 km.

2 variantas

1. C. **2.** B. **3.** C. **4.** A. **5.** a) 2; b) septynių; c) 96. **6.** a) 1600; b) 18; c) $-\frac{7}{9}$, $\frac{1}{2}$.
7. a) Funkcijos reikšmės didėja, kai $x \in \left(-\frac{8}{3}; 0\right)$ ir $(1; +\infty)$; mažėja, kai $x \in \left(-\infty; -\frac{8}{3}\right)$ ir $(0; 1)$; b) 1) $p=2$, $q=0$; 2) $x=-1$; 3) $y=-1$;
c) 1) $x \in \left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$; 2) $a=\frac{5}{3}$; 3) $y=\frac{5}{3}\ln 5$.
8. 1) $f'(x)=\frac{\sqrt{3}}{4}\cos(2x)-\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}\sin x$; 2) $f(0)=0$, $f'(\pi)=0$;
3) πk, $k \in \boldsymbol{Z}$; $(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.
9. a) 2) $Q(x)=1156-\frac{7860{,}8}{x}-27{,}2x$ (cm^2); 3) $\frac{4}{5}$ arba $\frac{5}{4}$; b) 4 m, 4 m, 2 m.

K19. KARTOJIMO MEDŽIAGA

1 variantas

1. B. **2.** C. **3.** C. **4.** D. **5.** C. **6.** a) $F(x)=\frac{3}{2}\operatorname{tg}(2x)+C$; b) $F(x)=\frac{x^5}{5}+2\frac{1}{5}$.
7. a) 63; b) 36; c) −1. **8.** a) 36; b) $7\frac{1}{2}-4\ln 4$. **9.** $2\frac{7}{8}$. **10.** a) $\frac{3}{5}$;

b)

$m=$	1	2	3
$\mathbf{P}(X=m)=$	0,4	0,24	0,36

$\mathbf{E}X=1{,}96$.

2 variantas

1. B. **2.** C. **3.** D. **4.** A. **5.** A. **6.** a) $F(x)=-\frac{\operatorname{ctg}(2x)}{3}+C$; b) $F(x)=-\frac{1}{3x^3}-2\frac{23}{24}$.
7. a) $3\frac{3}{4}$; b) $\frac{1}{2}$; c) $\frac{1}{4}$. **8.** a) $1\frac{1}{3}$; b) $4-3\ln 3$. **9.** $2\frac{1}{4}$. **10.** a) $\frac{4}{7}$;

b)

$m=$	1	2	3
$\mathbf{P}(X=m)=$	0,3	0,21	0,49

$\mathbf{E}X=2{,}19$.

K20. KARTOJIMO MEDŽIAGA

1 variantas

1. A. **2.** B. **3.** C. **4.** C. **5.** B.

6. a) 42 cm; b) 10 ilg.v., 5 ilg.v., 50 ilg.v., 125 kv.v.; c) 2) 20 kv.v.; 3) $\sqrt{41}$ ilg.v.; 4) $\frac{40\sqrt{41}}{533}$.

7. a) 1) $12\sqrt{3}$ kv.v.; 2) 4π kv.v.; 3) $2\sqrt{3}$ ilg.v.; 4) $\frac{3\sqrt{3}}{\pi}$; b) $\sqrt{3}\cdot\frac{168}{25}$; c) $\frac{a^2}{4\cos\alpha}$ kv.v.

8. a) 1) 14 ilg.v.; 2) 476π pl.v.; 3) 3020π tūr.v.; b) ne.

9. a) Ne; b) taip. **10.** a) -2, $\frac{1}{4}$; b) $-\frac{\sqrt{10}}{10}$.

2 variantas

1. A. **2.** D. **3.** C. **4.** A. **5.** C.

6. a) 36; b) 2) $\frac{12}{5}$; 3) $\frac{4}{5}$; 4) 32; c) 1) 8; 2) $4\sqrt{5}$; 3) 128; 4) $8(4+\sqrt{5})$.

7. a) 1) 54; 2) 27π; 3) 3; 4) $2:\pi$; b) $\frac{8\sqrt{3}}{5}$; c) $\frac{b^2\cos\alpha}{2}$.

8. a) Galima; b) 1) 30; 2) 10 ir 20; 3) $60\sqrt{61}\pi$. **9.** a) Ne; b) ne. **10.** a) $-\frac{1}{2}$ ir 3; b) 60°.

BANDOMASIS EGZAMINAS

1 variantas

1. D. **2.** B. **3.** D. **4.** B. **5.** B. **6.** C. **7.** $x \in [8; +\infty)$. **8.** -40°.

9. 1) $G(x) = x^2 - 2x + C$; 2) $G(x) = x^2 - 2x + 2$; 3) $2\frac{2}{3}$ kv.v.

10. $R = 2$ m, $H = 8$ m. **11.** 1) $DE \parallel AB$; 2) 3 cm; 4) $18\sqrt{3}\,\text{cm}^2$.

12. $\frac{2}{9}$. **13.** $\frac{3}{4}$. **15.** 7. **16.** 70 kg. **17.** Užteks.

2 variantas

1. E. **2.** D. **3.** B. **4.** A. **5.** C. **6.** E. **8.** -75°.

9. $x \in [-7; 2]$. **10.** 2) 7 dm; 3) $\approx 183\,\text{dm}^2$. **11.** 50%. **12.** $-\frac{13}{16}$.

13.

$m =$	0	1	2	3	5	6	7	8
$\mathbf{P}(X = m) =$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

$\mathbf{E}X = 4$.

14. $(3; +\infty)$. **15.** Taip. **16.** Po $27\frac{3}{11}$ minutės.

17. 11 obelaičių ir 5 kriaušaitės. **18.** $\sqrt[3]{\frac{3V}{5\pi}}$.

3 variantas

1. B. **2.** D. **3.** C. **4.** A. **5.** B. **6.** E. **7.** $x = 2$.

8. 1) $a_1 = 1$, $a_2 = 9$, $a_3 = 17$; 2) 8; 3) 23 narys. **9.** $x = 53$.

10. 3. **11.** 1,8 m; 4 m. **12.** $t = 1$ ir $t = 4$. **13.** 12%. **14.** 2 sprendinius.

15. $\approx 97^\circ$. **16.** 5. **17.** 1) $a = -\frac{1}{360}$, $c = 10$; 2) $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{1}{3}$. **18.** $[-3; -1]$.

4 variantas

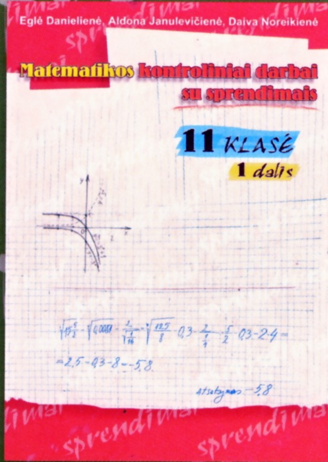
1. D. **2.** C. **3.** D. **4.** B. **5.** C. **6.** D. **7.** B.

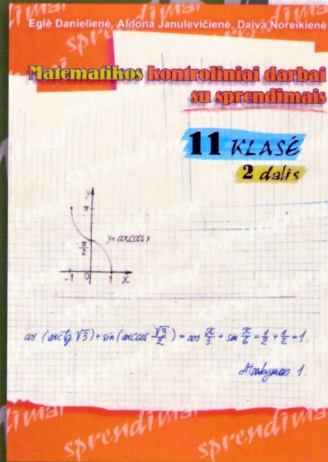
8. 1) $x \in (-\infty; -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; +\infty)$; 2) $-\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$. **9.** Neekvivalenčios. **10.** $4\frac{1}{5}$ s.

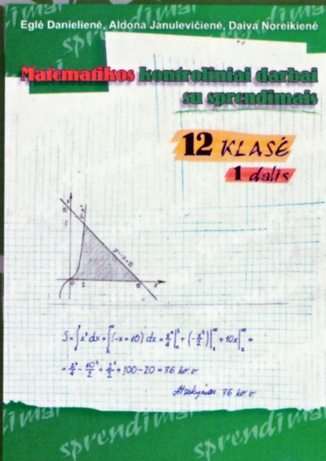
11. $a = 3$. **12.** $(\log_5 2; 0)$. **13.** 2) $\frac{7}{12}$; 3) $\frac{1}{4}$. **14.** 40° arba 130°. **15.** $x = 10$.

16. $\frac{\pi}{3}$ ir $-\frac{\pi}{6}$. **18.** 6 km/h. **19.** -3. **20.** 90°, $\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, $90^\circ - \arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Leidinys atitinka ŠMM patvirtintus standartus ir programas.
Leidinys atitinka matematikos vadovėlį.
Visi uždaviniai patikrinti ir perspręsti leidyklos specialistų.







ISBN 978-9955-680-56-7